# 相対論的量子力学

［量子力学2 改訂改題］

森田正人
森田玲子 共著

共立出版株式会社

# はしがき

粒子の速度が光速に近づいてきた場合の量子力学的とり扱いを，相対論的量子力学という．また電磁場はもともと相対論的であり，この量子論も含まれている．最近の理工系分野での技術革新を見ると，その精度の上昇から，当然相対論的補正を必要とする時代にさしかかっている．このような時代にあって，学部学生のための量子力学に，相対論的量子力学を加味する試みがなされてきた．相対論的量子力学という題名の教科書は，内外に数多くあるが，大学院生を対象としているのがほとんどである．本書は学部学生にとっての，相対論的量子力学の入門書として，著述されている．

そこで光速に近い速度をもつ粒子の運動方程式を量子力学的に求めると，Klein-Goldon の方程式や Dirac の方程式が導かれる．これらの方程式や，古典的な電磁場の Maxwell 方程式は，いずれも相対論的な Lorentz 変換に対して不変性をもっていることを示す．Dirac 方程式より，電子には固有スピンがあることを自然に導き出すことができる．

電磁場は古典的にも十分相対論的ではあるが，波動の第 2 量子化を行なうことによって，波動の粒子性を具体的に定式化できるので，波動の粒子的描像を極めて明確に理解できる利点があり，ここに紹介することにした．もともと粒子である電子の波動性は，Dirac 方程式によって記述されており，負エネルギーの解の存在を契機に，空孔理論が生まれた．電子の波動を第 2 量子化することによって，粒子に対する反粒子（陽電子）の存在を明白に定式化することができる．

最後に，物質と電磁場との相互作用の典型的な例として，電子と電磁場との相互作用について記述する．特に電子による光子の散乱を粒子数表現を用いて評価する．なお原子による光の放出，吸収の量子力学的遷移確率や，スピンとパリティの選択律の評価についてもまた，粒子数表現は極めて有効である．

本書の通読にあたっては，本講座14巻「量子力学」程度の知識を必要とする．しかしそれ以上の数学的準備を行なう必要はない．また，相対論や古典電磁気学は最初に簡単に記述した．3次元ベクトル公式，Diracの$\gamma$行列の代数，粒子数表現などにつき，必要最少限を付録として加えた．

本書の内容は，著者の一人が，コロンビア大学，京都大学，大阪大学などにおいて，学部3～4年次生に対する講義に基づいて記述されている．したがって，各式の導出はすべて，鉛筆なしに目で論理を追える程度に記述されている．多くの読者にとっては冗長であろう．そのような読者には，自信をもって速読されることを期待したい．

本書は本講座の旧版「量子力学2」のうち非相対論的な部分を省き，改訂改題したものである．このことを御了承して戴いた旧版共著者の大鹿　讓博士，横尾由松博士，大坪久夫博士に，御好意を感謝する．また過去5ヶ年の間，辛抱強く著者を激励し，完成に導いて下さった共立出版株式会社の佐藤邦久氏に衷心より感謝する．校正，印刷には高橋正志氏の御協力を得た．

1987年9月

著　者

# 目　　次

## 1.　特殊相対性理論



## 2.　電磁場の古典論



## 3.　相互作用がない場合のディラック方程式

## 4. 電磁場がある場合のディラック方程式



## 5. 場 の 量 子 論



## 6. 光子と物質との相互作用

## 7.　コンプトン散乱



## 付　　録

# 1

# 特殊相対性理論

前世紀末までの物理学においては，自然の構成要素として，粒子系と電磁場を考えた．荷電粒子は電磁場の中で，ローレンツ（Lorentz）力の作用のもとにニュートン（Newton）の運動方程式に従って運動するとした．粒子の運動が光速 $c$ に近づくと，Newton の運動方程式には相対論的な補正を加えなければならない．

一方本世紀初頭，すなわち1900年代に入ると，光や電子に関する画期的な現象が次々と明らかにされてきた．これらは空洞輻射の問題，光電効果，原子スペクトル，コンプトン（Compton）効果，電子線による回折現象などである．これらの現象から，光が波動的な性質を示すだけでなく，**光子**と呼ばれるように粒子的に振舞うことが知られてきた．そしてまた，電子が粒子的な性質を示すばかりでなく，**物質波**と呼ばれるように波動的に振舞うことが知られてきた．

原子スペクトルは，原子内の電子が，ある特定のエネルギーをもつ軌道上だけを運動することが許されるとし，電子が高いエネルギーの軌道から低いエネルギーの軌道へ遷移するとき，そのエネルギー差に等しいエネルギーをもった光子が1個放出されると考えることによって理解できる．これは古典物理学では理解しがたい考え方である．このような原子や分子など，ミクロの物質と電磁波に関与する現象を記述する力学として，量子力学が誕生した．

量子力学においては，古典力学における全エネルギー，すなわち運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの和を，それぞれ状態関数に作用する演算子におきかえる．全エネルギーに対応する演算子，ハミルトニアンの固有関数

を，力学系の固有状態を表す状態関数とみなし，また固有値を固有エネルギーとみなした．このようにして求められた固有値は，たとえば原子の軌道電子のエネルギーであり，実測された電子の電離エネルギーとよい精度で一致し，とびとびの値をとることが知られている．放出X線のエネルギーも，異なった固有値の差として理解される．この他にも量子力学がミクロの世界の力学として成り立っている実例は，たとえば本講座14巻の量子力学（大鹿，金野著）を参照されたい．

古典力学では，粒子が光速 $c$ に近い速度で運動する場合には，運動方程式を相対論的にとり扱わねばならないことが知られている．今までに学んだ非相対論的な場合の量子力学を拡張して，相対論的量子力学を組み立てるのが本書の目的である．たとえば電子に対する状態関数は，非相対論的な場合，シュレディンガー (Schrödinger) 方程式を満足する固有関数であった．相対論的現象では，電子の状態関数は，ディラック (Dirac) 方程式を満たす固有関数である．この結果，電子の自転の自由度，すなわちスピンは，このDirac方程式から自動的に正しく導出される．

さらに質量のない光子は光速 $c$ で伝播するので，電磁場の満たすマクスウェル (Maxwell) 方程式は，当然相対論的に不変な形に書かれている．このことは後で詳しく述べるように，互いに等速直線運動をしている2つの座標系において，Maxwellの方程式が全く同じ形に表されていることをいう．上記2個の座標系に優劣がないという立場から，この様な要請が理解できるであろう．したがって，Dirac方程式も相対論的に不変であることが必要だし，実際そうなっていることが後で示される．

このように相対論的な速度に達した粒子の運動や，光の振舞いについてこれから作る理論は，すべて相対論的要請を満たしていなければならない．そのための準備として，まず1905年アインシュタイン (Einstein) によって創られた特殊相対性理論を簡単に紹介しておこう．

## 1·1 慣性系

物体の運動をある座標系（たとえば地上にいる人）から観測して，運動法則を得たとする．次に，始めの座標系に対して一定速度で並進運動をしている座

標系（たとえば一定速度で走る自動車に乗っている人）から同じ運動を観測すると，同じ運動法則が得られる．したがって，2つの座標系では同じ運動法則が成り立ち，初期条件が同じならば，同じ観測結果が得られる．

質点の運動に対する（Newton の）運動の第1法則によれば，外力を受けない質点は，静止したままであるか，あるいは等速直線運動を続ける．この法則を**慣性の法則**というが，一般に慣性の法則が成り立つような座標系を**慣性系**という．最初の例では，はじめの座標系が慣性系ならば，これに対して等速直線運動をしている後の座標系も慣性系である．

ある慣性系 $K$ で，質量 $m$ の質点の定点 $(0,\ 0,\ z_0)$ のまわりの単振動を考えてみよう．時刻 $t$ における質点の位置を $(x,\ y,\ z)$ とし

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-k(z-z_0) \tag{1·1}$$

とする．ただし，$k$ は正の定数である．慣性系 $K$ に対して $z$ 軸方向に一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている慣性系 $K'$ を考える．2つの慣性系の原点は $t=0$ で一致しているものとすると，2つの座標系の座標の間には

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=z-vt,\quad t'=t \tag{1·2}$$

という関係がある．(*1·2*) のような変換を**ガリレイ** (Galilei) **変換**という．(*1·1*) に (*1·2*) を代入し，$dv/dt=0$ に注意すると

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2}=0,\quad m\frac{d^2y'}{dt'^2}=0,\quad m\frac{d^2z'}{dt'^2}=-k(z'-z_0{}') \tag{1·3}$$

が導かれる．したがって，質点の運動は $K'$ 系から見ると，式の中の変数にプライムがついているほかは $K$ 系から見た場合と全く同じ形の運動方程式によって記述されている．

一般に，Newton の運動方程式は，慣性系 $K$ で質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$，時刻 $t$ における質点の位置を $\boldsymbol{r}$ とすると

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F} \tag{1·4}$$

と表され，慣性系 $K'$ では

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}=\boldsymbol{F}' \tag{1·5}$$

と表される．(*1·5*) の右辺 $\boldsymbol{F}'$ の $x'$ 成分は，慣性系 $K$ での力 $\boldsymbol{F}$ の $x$ 成分と同

じ形の関数であって，慣性系 $K'$ から見た外力の $x'$ 成分である．他の成分についても同様である．このことを，Newton の運動方程式は**Galilei 変換に対して不変である**という．すなわち，どの慣性系から見ても運動法則は全く同じ形式で表されるので，それらの中から絶対静止系のような特別の慣性系を選び出すことはできない．この事情を**Galilei の相対性原理**という．

もっと一般的に書き表すと，$K$ 系で物理量 $A, B, \cdots$ を測定したとき，これらの量および各種の微係数の間の関係式

$$f\left(A, B, \cdots;\ \frac{\partial A}{\partial x_i},\ \frac{\partial B}{\partial x_k},\ \cdots\right)=0 \qquad (1\cdot6)$$

によって物理法則が書き下されたとする．$K'$ 系では物理量が $A'$, $B'$, … と測定され，物理法則が

$$f\left(A', B', \cdots;\ \frac{\partial A'}{\partial x_i'},\ \frac{\partial B'}{\partial x_k'},\ \cdots\right)=0 \qquad (1\cdot7)$$

と書き表される．このとき，上の 2 つの式は変数の間の関係式，すなわち関数形 $f$ が同じである．このことを，自然法則は慣性系の選び方に対して**不変**であるという．あるいは，自然法則は**共変的である**という．この原理は，力学における Galilei の相対性原理を，電磁気学を含むすべての基本的自然法則に拡張したものということができる．

## 1·2　特殊相対性理論

### A.　光速度不変の原理

ホイヘンス (Huygens) は光を波としてとり扱い，真空は光波を伝える媒質エーテル (ether) によって満たされていると仮定した．もしそうならば，エーテルに対して静止している座標系を絶対静止系と考えることができる．光はこのエーテルの中を光速 $c$ で伝わっていく．絶対静止系のエーテルの中を $x$ 方向に一定速度 $v$ で動いている観測者から見ると，光の速度は $x$ 方向では $c-v$ となるはずであり，一般には，一定速度 $v$ に対する方向によって変化する．

この考え方を確かめるために，マイケルソン (Michelson) とモーレー (Moley) は光の干渉計を用いてこの微小変化を測定した．しかし光の進行方向による速度の変化は認められなかった．このことにより，絶対静止のエーテ

ルの存在は否定され，また光の速度は慣性系をどのようにとるかということとは無関係に，一定であることが証明された．

### B.　特殊相対性理論

1905年 Einstein は，自然法則は慣性系によらず全く同一に表されるという相対性原理と，光速度はすべての慣性系で同一であるという光速度不変の原理を出発点として，特殊相対性理論を作った．すなわち，次の2つの基本原理をおいた．

（1）　すべての物理法則はどのような慣性系でも同じ形である．

（2）　どのような慣性系から見ても，真空中の光速度は一定である．

ここで新しく，空間座標 $x$, $y$, $z$ と時間まで含めた4次元座標系（時空の座標系）を導入する．そこで，2つの座標系 $K(x, y, z, t)$ と $K'(x', y', z', t')$ を考えよう．2つの座標系の原点は $t=0$ で一致しており，その瞬間の時刻を $t'=0$ ととる．原点から出発した光の時刻 $t$ における波面は

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \tag{1·8}$$

と第1の慣性系 $K$ では書き表される．同じ波面を第2の慣性系 $K'$ で観測すると

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{1·9}$$

と書き表される．このことが基本原理（2）を意味している．上記の2つの式では，$x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ という関数の値が，慣性系によらず同じであると考えることができる．また，2つの慣性系に対する4個の空間時間座標 $(x, y, z, t)$ と $(x', y', z', t')$ の間の関係式は，それぞれ斉一次的（線形）でなければならない．というのは，もしそうでなくて非線形ならば，一方から他方を導くとき，同じ形を保つことができないからである．このような変換の具体的な形を次に考えてみよう．

いま，慣性系 $K(x, y, z, t)$ を用いる観測者と $K'(x', y', z', t')$ を用いる観測者があるとする．ここで，$K'$ は $K$ に対して相対速度 $v$ で $z$ 軸方向に等速度運動をしているとする（図1·1参照）．この事情は，地上を一定の速さで走る列車を考えてみれば理解できる．レールに沿って $z$ 軸あるいは $z'$ 軸をとることにすると，地上に固定された座標系が慣性系 $K$ であり，列車に固定された座標系が慣性系 $K'$ である．地上の原点と列車の原点（たとえば，列車の先端）

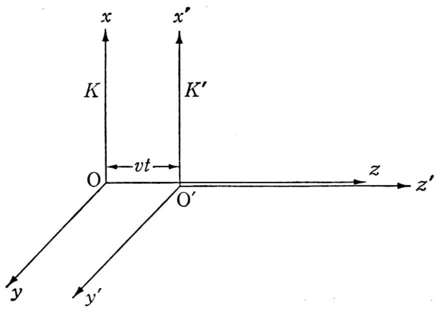



図 1·1　2つの慣性系 $K$ と $K'$

が一致したとき，$t=t'=0$ と定める（地上の観測者の用いる時計が $t=0$ を指し，列車の観測者の用いる時計も $t'=0$ を指す）．空間のある1点で，ある時刻に1つの事件が起こったとする．起こった場所と時刻がわかっているとき，この事件を**事象** (event) と呼ぶことにする．$K$ 系（地上）の観測者がある事象を点 $(x, y, z)$ において時刻 $t$ で観測したとき，$K'$ 系（列車内）の観測者がそれを点 $(x', y', z')$ の位置に時刻 $t'$ で観測したとする．列車の原点は，地上の原点に対して $t$ だけの時間に $vt$ だけ進むから，$z'=0$ ならば $z=vt$ でなければならない．したがって，一般には

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=\alpha(z-vt) \tag{1·10}$$

の形になっていなければならない．ここで $\alpha$ は定数である．列車と地上の観測者の立場は全く同等である．列車に対して地上は $-v$ の速度をもっている．そこで上式の代わりに

$$x=x',\quad y=y',\quad z=\alpha(z'+vt') \tag{1·11}$$

が成り立たなければならない．

特別の場合として，$z$ 方向に伝播する光を両慣性系から観測するとしよう．両者の原点が一致したとき，光が発せられたとする．地上の観測者には

$$z=ct \tag{1·12}$$

と見える．列車に乗っている観測者には

$$z'=ct' \tag{1·13}$$

と見える．そこで (1·10)～(1·13) を満足する $\alpha$ を求めてみよう．まず (1·12), (1·13) を (1·10), (1·11) へ代入すると

$$ct'=\alpha(c-v)t \tag{1·14}$$

$$ct=\alpha(c+v)t' \tag{1·15}$$

が得られる．(1·14), (1·15) を辺々掛け合わせて $t, t'$ を消去すると

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (1\cdot16)$$

となる．ここで $\alpha$ の符号は，$v=0$ のとき $z=z'$ であることから，正と定まる．(*1・16*) で与えられた $\alpha$ を (*1・10*)，(*1・14*) へ代入し，(*1・12*) を用いると

$$x'=x,\ \ y'=y,\ \ z'=\frac{z-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ \ t'=\frac{t-\frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (1\cdot17)$$

が得られる．このような変換は，ある慣性系 $(x, y, z, t)$ から，それに対して相対速度 $v$ で $z$ 軸方向に等速度運動している慣性系 $(x', y', z', t')$ への特別な**ローレンツ変換** (Lorentz transformation) として知られている．また (*1・11*)，(*1・13*)，(*1・15*)，(*1・16*) を用いて $z$, $t$ について解くと

$$x=x',\ \ y=y',\ \ z=\frac{z'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ \ t=\frac{t'+\frac{vz'}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (1\cdot18)$$

となる．これは慣性系 $(x', y', z', t')$ から，それに対して相対速度 $v$ で $-z$ 軸方向へ等速度運動している慣性系 $(x, y, z, t)$ への特別な Lorentz 変換である．変換式 (*1・17*) および (*1・18*) が

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \qquad (1\cdot19)$$

を満足していることは自明であろう．(*1・17*) と (*1・18*) からわかるように，$x$ と $t$ の役割は，$x'$ と $t'$ の役割と対等であり，唯一の差異は速度 $v$ のサインだけである．

Newton 力学では，(*1・2*) で与えられたように時間と空間は互いに無関係なものであったが，Lorentz 変換では，これらは無関係なものではなく，互いに依存し合ったものになっている．また互いに等速度運動をしている 2 人の観測者には，他方の物体の長さが運動方向に収縮し，時計の進み方が遅れて観測されることがよく知られている．これは次に述べるような方法で理解できる．

前と同様に，地上に固定された座標系を $K$ 系，列車に固定された座標系を $K'$ 系としよう．いま，列車内の観測者が点 $z'=0$ で 2 つの事象を時刻 $t_1'$, $t_2'$ $(t_2'>t_1')$ に観測したとする．これを地上の観測者が時刻 $t_1$, $t_2$ に観測したとすると，(*1・18*) より

$$t_1=\frac{t_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t_2=\frac{t_2'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ゆえに

$$t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{1·20}$$

すなわち，列車内で観測した時間間隔は，地上で観測したものにくらべて係数 $\sqrt{1-(v/c)^2}$ だけ小さくなっている．もし $t_2-t_1=1$ 秒ならば，$t_2'-t_1'=\sqrt{1-(v/c)^2}$ 秒となって，地上の観測者から見れば列車と共に動いている観測者の時計は遅れて見える．これとは逆に，地上の観測者が点 $z=0$ で2つの事象を時刻 $t_1, t_2(t_2>t_1)$ に観測したとする．これを列車内の観測者が時刻 $t_1', t_2'$ に観測したとするとき，$t_1', t_2'$ は (1·17) を用いて導出できる．この場合もまた

$$t_2'-t_1'=\frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{1·21}$$

となって，列車にいる観測者から見れば地上の観測者の時計はやはり遅れて見える．

次に，列車内の観測者が測った列車の長さを $l_0$ とし，地上の観測者がこれを測定することにしよう．それには地上で見て同時刻に列車の先端と後端の座標を読みとればよい．$t=0$ で後端は原点にあるとしよう．先端は地上で観測すると $z$，列車上で観測すると $z'=l_0$ である．(1·17) で $t=0$，$z'=l_0$ とおけば

$$z=l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{1·22}$$

となり，地上の観測者が列車の長さを測定すると，$l_0$ より短く観測される．これを**ローレンツ収縮** (Lorentz contraction) という．

## 1·3　4次元時空（ミンコフスキー空間）

前節で述べたように，事象はそれが起こった場所と時刻によって指定される．すなわち，時間と空間とをまとめて1組にした4次元空間の点 $(x, y, z, t)$ が1つの事象を表すと考えることができる．しかし，時間 $t$ と空間座標 $x, y, z$

ではディメンションが違うので，$t$ の代わりに $ct$（$c$ は光の速さ）をとって，$(x, y, z, ct)$ という組を用いることにする．

ここで

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{1·23}$$

を原点から4次元時空の点 $(x, y, z, ct)$ までの距離の二乗と定義する．さらに (1·23) を拡張して，2点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1, ct_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2, ct_2)$ との距離の二乗を

$$|\mathrm{Q}-\mathrm{P}|^2 \equiv (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 - c^2(t_2-t_1)^2 \tag{1·24}$$

によって定義する．このような点の集まりから作られた空間を**ミンコフスキー** (Minkowski) **空間**という．**3次元ユークリッド** (Euclid) **空間**では，2点 $(x, y, z)$ と $(x', y', z')$ との距離の二乗を $d^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ と定義した．これは3次元空間の回転に対して不変である．Lorentz 変換は $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$，すなわち Minkowski 空間の原点から任意の点までの距離の二乗を不変に保つ変換であるということができるから，Lorentz 変換を3次元空間の回転に対応させて考えることができる．

ところで，質点が運動するとき，任意の時刻 $t$ において質点の位置 $(x, y, z)$ が与えられるから，その運動は3次元空間の1つの曲線（軌跡という）で表される．4次元時空においても，質点の運動はこれらの $(x, y, z, ct)$ の値を連ねてできる1つの曲線で表される．3次元空間の軌跡に相当するこの曲線を，4次元時空では**世界線** (world line) という．原点より $+z$, $-z$ 軸方向に出た光の世界線は $z \pm ct = 0$ で，図1·2に実線で示したようになる．前の節で考えた $z$ 軸方向に速度 $v$ で進む列車の世界線は点線で示されている．運動する物体の速さは光速 $c$ を超えることはできないから，$ct$ 軸と列車の世界線のなす角を $\varphi$ とすれば，$\tan\varphi = v/c \leq 1$ となり，$\varphi \leq \pi/4$ となる．$v \leq c$ であることは次のように

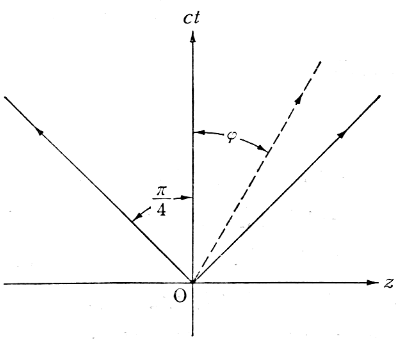



**図 1·2** 原点より $+z$, $-z$ 方向に出た光の世界線（実線）と $z$ 方向に速度 $v$ で進む列車の世界線（点線）

考えればわかる．慣性系 $K$，これに対して $z$ 軸方向に速度 $v_1$ で動いている慣性系 $K'$，さらに $K'$ に対して速度 $v_2$ で $z$ 軸方向に動いている慣性系 $K''$ を考える．$K''$ の $K$ に対する速度 $v$ は，古典力学によれば $v=v_1+v_2$ となるが，相対論的にはどうであろうか．(*1・17*) より

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=\frac{z-v_1t}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}},\quad t'=\frac{t-\frac{v_1z}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}$$

$K''$での座標を（$x'',y'',z'',t''$）とすれば

$$x''=x',\quad y''=y',\quad z''=\frac{z'-v_2t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}},\ t''=\frac{t'-\frac{v_2z'}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}$$

が成り立つ．$K''$ の $K$ に対する速度を $v$ とすると

$$x''=x,\ y''=y,\ z''=\frac{z-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\quad t''=\frac{t-\frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

以上の式を用いて計算すると，$v$ として次の式が得られる．

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$$

いま，$v_1/c\leq 1$，$v_2/c<1$ とすると

$$\left(1-\frac{v_1}{c}\right)\left(1-\frac{v_2}{c}\right)=1-\frac{v_1+v_2}{c}+\frac{v_1v_2}{c^2}\geq 0$$

ゆえに

$$1+\frac{v_1v_2}{c^2}\geq\frac{v_1+v_2}{c},\qquad \text{等号は } v_1=c \text{ のとき}$$

となって．$v\leq c$ となる．これは $v_1$ と $v_2$ を入れかえた場合にも成り立つ．また，$v_1=v_2=c$ のときには $v=c$ である．このように，相対論では，光速度以下の速度を合成しても，光速度を超えることはない．すなわち，いかなる物体も光速 $c$ より速く動くことはできないのである．

さて，原点からの距離が 0 であるような点の集合

$$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$$

で表される面は，原点から発した光の世界線を母線にもつ 3 次元の錐面であ

る．この円錐を**光円錐**（light cone）という．4次元時空を光円錐の内部，外部，光円錐上と3つの部分に分けると，任意の1点 $P(x, y, z, ct)$ に対して，$s^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2<0$ のときはPは光円錐の内部（図1·3の領域 I, I′），$s^2>0$ のときPは光円錐の外部（領域 II, II′），$s^2=0$ のとき光円錐上にある．$s^2<0$，すなわち $x^2+y^2+z^2<c^2t^2$ のときPは原点に関して**時間的**，$s^2>0$，すなわち $x^2+y^2+z^2>c^2t^2$ のとき**空間的**，$s^2=0$ のときを**光的な関係にある**という．$s^2$ は Lorentz 変換に対して不変な量であるから，いかなる慣性系から見ても，光円錐の内部の点は常に内部の点であり，外部の点も常に外部の点であって，内部から外部に移ったり，またその逆も決して起こらない．図1·2からわかるように，等速度 $v$ で $z$ 軸方向に運動している列車の世界線は光円錐の内部にある．一般に，運動している粒子の世界線は，粒子が等速度運動をしているとは限らないので，曲線となるが，曲線上の任意の点での接線が $ct$ 軸となす角 $\varphi$ は $\varphi\leq\pi/4$ であるから，原点Oを発した粒子の世界線は光円錐内部にある．粒子が光速 $c$ で原点Oを発したときは，その世界線は光円錐上にある．

ところで，図1·4のように慣性系 $K$ で空間部分の座標軸と $ct$ 軸を直交させた直交座標系をとったとき，これに対して $z$ 軸方向に速度 $v$ で運動している慣性系 $K'$ の座標軸はどのように表されるか考えてみよう．(1·17) において $z'=0$ とすると $z-vt=0$，$t'=0$ とすると $t-(v/c^2)z=0$ が得られる．これより，

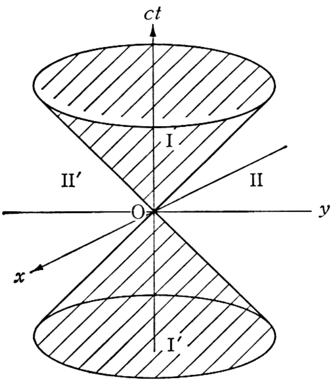



**図 1·3**　4次元時空と光円錐．空間座標軸は $x, y$ 軸で代表させてある．

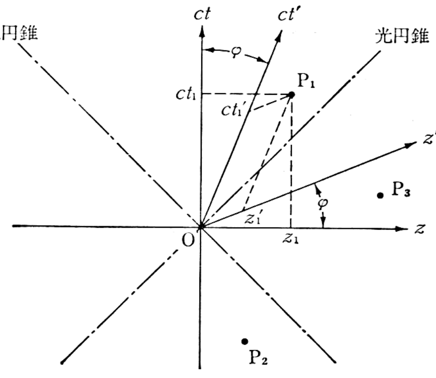



**図 1·4**　慣性系 $K(z, ct)$ と慣性系 $K'(z', ct')$ および2つの事象の関係

$z-vt=z-(v/c)(ct)=0$ が $ct'$ 軸を表す直線の方程式であり，$ct-(v/c)z=0$ が $z'$ 軸を表す直線の方程式であることがわかるから，これらを図に描くと，図1・4の $ct'$, $z'$ のような斜交軸になる．ここで $\tan\varphi=v/c$ である．いま任意の1点 $P_1$ の座標を $K$ 系で観測して $(x_1, y_1, z_1, ct_1)$，$K'$ 系で観測して $(x_1, y_1, z_1', ct_1')$ を得たとする．$P_1$ が図1・4に示されたように光円錐内部にあるとき，$t_1>0$ ならば $t_1'>0$ である．したがって，原点Oである事象が起こり，点 $P_1$ で別の事象が起こったとすると，どの慣性系で見ても，O点の事象（事象Oということにする）は $P_1$ 点の事象（事象 $P_1$ という）より時間的に先に起こっていて，その時間の順序は変わらない．そこで，事象Oが原因で事象 $P_1$ がその結果であるとすると（このような関係を**因果関係がある**という），$P_1$ が光円錐内部の $t>0$ の領域にあれば，事象Oの作用が事象 $P_1$ に伝わる速さは光速 $c$ を超えないので，事象Oは事象 $P_1$ に影響を与えることができる．この領域を事象Oに対する**未来**という．事象 $P_2$ は事象Oより時間的に先に起こっていて，この時間的順序もまた慣性系のとり方によって変わらない．光円錐内部の $t<0$ の領域をOに対する**過去**という．この領域で起こった事象は事象Oの原因となることはできるが，結果となることはできない．これに対して光円錐の外部にある点 $P_3$ については，$K$ 系では $t_3>0$ であるが，$K'$ 系では $t_3'<0$ である．これは，$K$ 系では事象Oは事象 $P_3$ より時間的に先に起こっているのに，$K'$ 系ではこの時間順序が逆転している．すなわち，観測者によって事象Oと事象 $P_3$ の起こる時間の順序が異なる．したがって事象Oと事象 $P_3$ の間には何の因果関係も認められない．実際，事象Oの作用が事象 $P_3$ に伝わるためには，その速さが $c$ より大きくなければならないが，これは不可能なので，事象Oと事象 $P_3$ は因果関係のない，別の事象である．

## 1・4 ローレンツ変換

一般の Lorentz 変換をとり扱うには

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad x_3=z,\quad x_4=ict \tag{1・25}$$

のように空間時間座標をまとめて4次元時空の点の座標 $x_\mu(\mu=1,2,3,4)$ として表すと理解しやすい．したがって今後

$$x_\mu=(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x, y, z, ict)$$

と書くことにする．ここで $x_k(k=1,2,3)$ は実数，$x_4$ は純虚数である．$x_4$ として純虚数を考えるのは，(1·23) において，$c^2t^2$ の項に負の符号がついているからである．Lorentz 変換は斉一次変換

$$x_\mu'=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu \tag{1·26}$$

のうち，特にその長さ

$$\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu x_\mu=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{1·27}$$

を不変に保つ変換である．(1·26) を (1·27) に代入すると，係数 $a_{\mu\nu}$ について次のような条件がなくてはならないことがわかる．

$$\sum_{\mu=1}^{4}a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}=\sum_{\mu=1}^{4}a_{\nu\mu}a_{\lambda\mu}=\delta_{\nu,\lambda} \tag{1·28}$$

ここで $\delta_{\nu,\lambda}$ はクロネッカーのデルタ (Kronecker's $\delta$) といい，添字が同じなら 1，異なる場合は 0 という数値を表す．上式より明らかなように，Lorentz 変換は結局，4 次元時空座標 $x_\mu$ に対する**直交変換**(orthogonal transformation) であるということができる．

また (1·26) において $x_k'(k=1,2,3)$ は実数，$x_4'$ は純虚数であるから

$$\left.\begin{array}{ll} a_{jk},\ a_{44}\quad (j,k=1,2,3) & \text{は実数} \\ a_{j4},\ a_{4k}\quad (j,k=1,2,3) & \text{は純虚数} \end{array}\right\} \tag{1·29}$$

でなければならない．

さてここで，4 次元時空におけるスカラー量，ベクトル量，テンソル量などを定義しておこう．まず，スカラー量の定義から始めることにする．いま，4 次元時空内の点 P における 1 つの物理量を $\varphi(x)$ としよう．ここで $x$ は ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) をまとめて表したもので，$\varphi(x)$ は 4 次元座標 $x_\mu$ の関数 $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ であることを意味している．Lorentz 変換後の新しい座標系における点 P の座標を $x'$ とし，同じ物理量の点 P における値を $\varphi'(x')$ としたとき

$$\varphi'(x')=\varphi(x) \tag{1·30}$$

の関係が成り立つ場合，物理量 $\varphi(x)$ を**スカラー量**，または単に**スカラー**という．

§1·1 で述べたように，観測者によって選ばれた座標系によらず，自然法則が同様に記述されることは，大変都合のよいことであり，我々はそのように記

述する方法を探さねばならない．そこで，Lorentz 変換によってお互いに関係づけられた座標系において，種々の物理量がどのように観測されるかを知ることが必要になってくる．そのためには，4 個の成分 $A_\mu(x)$ $(\mu=1,2,3,4)$ で決まる物理量 $A$ が，Lorentz 変換によって座標 $x_\mu$ と同様な変換を受ける場合を考える．すなわち，新しい座標系における同じ点での物理量の成分を $A_\mu'(x')$ とするとき

$$A_\mu'(x')=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}A_\nu(x) \tag{1·31}$$

のような関係が成り立つ場合，物理量 $A_\mu(x)$ を**ベクトル量**，または単に**ベクトル**という．今後，このような 4 次元ベクトルを**4 元ベクトル**ということにする．4 次元時空における速度，運動量，力なども **4 元速度，4 元運動量，4 元力**と呼ぶ．同様に，Lorentz 変換に対して

$$T_{\mu\nu}'(x')=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4}a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}T_{\lambda\rho}(x) \tag{1·32}$$

のような変換性を示す量は **2 階のテンソル**と呼ばれる．

ところで，2 つの 4 元ベクトル $A_\mu$ と $B_\mu$ とのスカラー積は，Lorentz 変換に対して次のように変換する．

$$\sum_{\mu=1}^{4}A_\mu'B_\mu'=\sum_{\mu,\nu,\lambda=1}^{4}a_{\mu\nu}A_\nu a_{\mu\lambda}B_\lambda=\sum_{\nu,\lambda=1}^{4}\delta_{\nu,\lambda}A_\nu B_\lambda=\sum_{\nu=1}^{4}A_\nu B_\nu \tag{1·33}$$

上の式で，左辺と一番端の右辺とは同じ形をしている．したがって，2 つのベクトルのスカラー積は 4 次元時空におけるスカラーである．

次に，スカラー量 $\varphi(x)$ の微分の変換性を考えてみよう．

$$\frac{\partial\varphi'(x')}{\partial x_\mu'}=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu'}=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}a_{\mu\nu} \tag{1·34}$$

ここで (*1·26*) の逆変換

$$x_\nu=\sum_{\mu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\mu' \tag{1·35}$$

およびその微分

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu'}=\sum_{\lambda=1}^{4}a_{\lambda\nu}\frac{\partial x_\lambda'}{\partial x_\mu'}=a_{\mu\nu} \tag{1·36}$$

を用いた．(*1·34*) は $\partial\varphi(x)/\partial x_\mu$ が 4 元ベクトルの成分であることを示している．ベクトル量の微分については

$$\frac{\partial A_\mu'(x')}{\partial x_\nu'}=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4} a_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\lambda(x)}{\partial x_\rho}\ \frac{\partial x_\rho}{\partial x_\nu'}=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4} a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\rho}\ \frac{\partial A_\lambda(x)}{\partial x_\rho} \qquad (1\cdot 37)$$

となるので，(*1·32*) とくらべると，2階のテンソルであることがわかる．(*1·34*) と (*1·37*) の結果より，微分記号 $\partial/\partial x_\mu$ は4元ベクトルの $\mu$ 成分と考えることができる．したがって，**ダランベルシャン** (d'Alembertian) と呼ばれる微分演算子

$$\square\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu{}^2} \qquad (1\cdot 38)$$

はベクトルのスカラー積 (*1·33*) と同じ変換性をもっている．これはスカラーであるから，Lorentz 変換に対して不変である．

## 1·5 相対論的力学

Newton 力学では，質点の運動はその位置 ($x$, $y$, $z$) を時間 $t$ の関数として表すことによって定められる．またこの関数形を決めるのは Newton の運動方程式である．§1·1 で述べたように，物理法則はすべての慣性系で同じ形でなければならないが，Newton の運動方程式は Lorentz 変換に対して共変的でない．そこで，相対論の要請を満足する力学の基礎方程式を求める必要がある．そしてこの方程式は $v \ll c$ のとき（このとき運動は**非相対論的である**という）には，Newton の運動方程式に一致するものでなければならない．また，質点はその位置を $t$ の関数として与えられているが，このパラメーター $t$ は Galilei 変換では，すべての慣性系に共通である．ところが Lorentz 変換では，$t$ の値は慣性系によって異なるから，$t$ の代わりとなる Lorentz 変換に対して不変なものをまず探してみよう．

(*1·24*) で4次元時空における距離 $s$ を定義した．ある慣性系 $K$ に対して速度 $\boldsymbol{v}(t)$ ($\boldsymbol{v}$ は一定である必要はない) で運動している粒子の世界線上に無限に接近した2つの点 P($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$)，Q($x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$) を考える．この2点間の距離 $ds$ は $dx_1=x_1'-x_1$，$dx_2=x_2'-x_2$，$dx_3=x_3'-x_3$，$dx_4=x_4'-x_4$ とすると

$$\begin{aligned}(ds)^2&=(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2+(dx_4)^2\\&=(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2-c^2(dt)^2\end{aligned}$$

となる．これは Lorentz 変換に対して不変な量である．この式を変形して

$$(ds)^2=(dt)^2\left[\frac{(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2}{(dt)^2}-c^2\right]$$
$$=(dt)^2[v^2(t)-c^2],\qquad v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|$$

ここで，§1·3 で述べたように，$v^2(t)\leq c^2$ であるから，$ds$ として次のようにとる．

$$ds=icdt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{1·39}$$

さらに

$$ds=icd\tau \tag{1·40}$$

$$d\tau=dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{1·41}$$

によって $d\tau$ を定義すると，$ds$ が Lorentz 変換に対して不変であるから，$d\tau$ もまた Lorentz 変換に対して不変な量である．そして $v(t)/c\ll 1$ のときには，$dt$ と一致する．ところで，粒子といっしょに運動している座標系 $K'$ は速度 $\boldsymbol{v}(t)$ で $K$ 系に対して運動しているのであるが，これは瞬間的には慣性系であると考えられる．$K'$ 系では粒子は静止しているから $v(t)=0$ であり，$d\tau=ds/ic=dt'$ となる．すなわち，$d\tau$ は粒子に固定された時計によって測られた微小時間間隔である．粒子が原点Oからある点Qまで動くとき，有限な時間間隔 $\tau$ は (1·41) で与えられた $d\tau$ を世界線に沿ってOからQまで積分することによって得られる．

$$\tau=\int_O^Q d\tau=\int_0^t dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} \tag{1·42}$$

$\tau$ もまた Lorentz 変換に対して不変な量である．(1·42) の，粒子に固定された時計で測られた時間 $\tau$ を**固有時** (proper time) という．

このようにして，Lorentz 変換に対して不変な量 $\tau$ が求められたので，時間 $t$ の代わりに $\tau$ をパラメーターとして粒子の運動を記述することにしよう．粒子の座標 $x_\mu$ を $\tau$ の関数として，**4 元速度** $u_\mu$ を

$$u_\mu=\frac{dx_\mu}{d\tau}\qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{1·43}$$

と定義する．これは Lorentz 変換に対して $x_\mu$ と同じ変換をするから，4 元ベ

クトルである．Newton 力学における速度 $\boldsymbol{v}=(dx_1/dt,\ dx_2/dt,\ dx_3/dt)$ との関係は

$$u_k=\frac{v_k(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\quad (k=1,2,3),\quad u_4=\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\tag{1·44}$$

と表される．(1·44) より

$$\sum_{\mu=1}^{4} u_\mu{}^2=-c^2\tag{1·45}$$

である．$v(t)/c\ll 1$ の場合には，$u_k$ は Newton 力学の速度成分 $v_k$ と一致する．

粒子に固定された座標系で測定した粒子の質量 $m_0$ を**静止質量** (rest mass) という．これはある決まった値をもつから，不変な定数である．この $m_0$ を用いて

$$p_\mu=m_0\frac{dx_\mu}{d\tau}=m_0u_\mu\tag{1·46}$$

によって**4元運動量** $p_\mu$ を定義する．$p_\mu$ は $u_\mu$ と同じ変換をするから，4元ベクトルである．Newton 力学の速度 $\boldsymbol{v}$ との関係は

$$p_k=m_0u_k=\frac{m_0v_k(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\quad (k=1,2,3),\quad p_4=\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\tag{1·47}$$

である．また

$$\sum_{\mu=1}^{4} p_\mu{}^2=-m_0{}^2c^2\tag{1·48}$$

が成り立つ．運動量は質量と速度 $\boldsymbol{v}$ との積であると考えると，質量 $m$ は

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}$$

と与えられると考えることができる．Newton 力学では $m$ は定数であったが，相対論的には $m$ もまた $v(t)$ に依存する．

Newton の運動方程式 $\boldsymbol{F}=m(d\boldsymbol{v}/dt)=d\boldsymbol{p}/dt$ を4元ベクトルに拡張して

$$f_\mu=\frac{dp_\mu}{d\tau}=m_0\frac{du_\mu}{d\tau}\tag{1·49}$$

と書いて，$f_\mu$ を4次元的な力（**4元力**）とする．(1·49) は Lorentz 変換に対して共変的であるから，これは一応相対論的な運動方程式の形をしている．そ

こで4元力$f_\mu$とNewtonの運動方程式に現れる3次元的な力$\boldsymbol{F}$との関係を調べよう．(1·49) の空間成分を書いてみると

$$f_k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v_k(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right)\quad k=1,2,3 \tag{1·50}$$

となる．$\boldsymbol{u}_\mu$と$\boldsymbol{v}$との関係 (1·44) の類推から

$$f_k=\frac{F_k}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\quad k=1,2,3 \tag{1·51}$$

の形を仮定すると，(1·50) は

$$F_k=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v_k(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right)$$

という形に書かれ，$v^2/c^2\ll1$のときにはNewtonの運動方程式と一致するので，(1·51) は不合理な仮定ではなかったことになる．

(1·49) の第4成分は

$$f_4=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{im_0c}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right) \tag{1·52}$$

である．$f_4$の物理的意味を考えるために，$m_0c^2/\sqrt{1-(v(t)/c)^2}$を$t$で微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right)=\frac{m_0v(t)}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\right)^3}\frac{dv(t)}{dt}$$

となる．一方

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right)=\frac{m_0v(t)}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\right)^3}\frac{dv(t)}{dt}$$

となるから

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\right)=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} \tag{1·53}$$

が得られる．(1·53) の右辺は外力$\boldsymbol{F}$が単位時間にする仕事であり，これは粒子のエネルギー$\boldsymbol{E}$の増加率に等しい．すなわち

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}=\frac{dE}{dt} \tag{1·54}$$

(1·53), (1·54) より

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} \tag{1·55}$$

が得られる．そこで，(1·52) で表された4元力の第4成分 $f_4$ は

$$f_4=\frac{i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}=\frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}\frac{dE}{dt} \tag{1·56}$$

である．(1·55) から，粒子の速さ $v(t)=0$ のときにも，粒子はエネルギーをもっていることがわかる．その値は

$$E_0=m_0c^2 \tag{1·57}$$

である．これを **Einstein の質量公式**という．

運動エネルギー $T$ は粒子の全エネルギー $E$ から静止エネルギー $m_0c^2$ を除いたものである．

$$T=E-m_0c^2=m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}-1\right] \tag{1·58}$$

$v/c\ll 1$ のとき，$v/c$ のべき級数に展開すると，(1·58) は

$$T=\frac{1}{2}m_0v^2+\cdots \tag{1·59}$$

となり，第2項以下を無視すると Newton 力学の運動エネルギーの式と一致する．さらに (1·55), (1·47) より

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m_0{}^2c^4 \tag{1·60}$$

が得られる．(1·60) によれば，運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子は $E=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m_0{}^2c^4}$ のエネルギーをもつ．すなわち，正と同時に負のエネルギーをもつことができる．$E>0$ の粒子に対して，$E<0$ の状態は実は反粒子を表すものであることが，第4章の空孔理論の節で示される．

# 2

# 電磁場の古典論

## 2·1 マクスウェルの電磁理論

電磁場の量子力学を始める前提として，古典電磁理論を簡単に紹介しておこう．(詳しい議論は種々の教科書に述べられている．たとえばこの共立物理学講座10巻「電気力学と相対論」谷川安孝著，を参照されたい．) 真空中に電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ の分布があるとき，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は**マクスウェルの方程式** (Maxwell's equations)

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{2·1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2·2}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{2·3}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0 \tag{2·4}$$

の解として与えられる．前章と同じく $c$ は光速を表している．($\boldsymbol{B}$ は**磁束密度**と呼ぶこともある．また $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを対応させる形式もある．) Maxwell 方程式にはそれぞれの物理的な裏づけがある．それには微分形式に書かれている上記の方程式に対して，それぞれに対応する積分形の式を書いてみると理解しやすい．

$$\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS=4\pi\int\rho d\boldsymbol{r} \tag{2·5}$$

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS+\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{2·6}$$

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{2·7}$$

$$\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=0 \tag{2・8}$$

今後 $d\boldsymbol{r}$ は体積要素を表すものとする．すなわち

$$d\boldsymbol{r}=dxdydz$$

これに対して閉曲線の線要素は (2・6), (2・7) のように $d\boldsymbol{s}$ と書き，これはベクトル量である．また，$\boldsymbol{n}$ は微小表面 $dS$ に垂直な内側から外側へ向いた単位ベクトルである．

微分形または積分形いずれにしても，最初の式は閉曲面を内から外向きに通過する電束 ($\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}$) の総量は，内部の電荷の $4\pi$ 倍に等しいことを示すガウス (Gauss) の法則である．2番目の式は，閉曲線に沿って磁場 ($\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$) を線積分したものが，その曲線の内側を通過する伝導電流の $4\pi/c$ 倍と変位電流の $1/c$ 倍の和に等しいことを示したものである．この式はアンペア (Ampère) の法則の拡張になっている．3番目の式は，閉曲線に沿って電場を線積分したものがその曲線の内側を通過する磁束の単位時間あたりの減少率の $1/c$ 倍に等しい，という電磁誘導の法則である．最後の式は磁気に関する Gauss の法則に相当し，磁気には真電荷に対応する磁荷がないことを表している．

このような物理的諸現象をもとにして作られた上記8式は**ガウス単位系** (Gaussian units) で表されている．以下の議論はすべてこの単位系で話を進めるが，他の単位系についても関連を述べておこう．

**ヘヴィサイド単位系**(Heaviside units) で表すには，Gauss 単位系のすべての式において，電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を $\sqrt{4\pi}\,\boldsymbol{E}$, $\sqrt{4\pi}\,\boldsymbol{B}$ に，また電荷および電流密度 $\rho$, $\boldsymbol{j}$ を $\rho/\sqrt{4\pi}$, $\boldsymbol{j}/\sqrt{4\pi}$ におきかえてやればよい．同様に，電磁場と電荷および電流密度に対して，それぞれ $\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{E}$, $\sqrt{4\pi/\mu_0}\boldsymbol{B}$, $\rho/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, $\boldsymbol{j}/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$ のおきかえをしてやれば，**MKS有理単位系**で記述された式になる．ここに $\varepsilon_0$, $\mu_0$ はそれぞれ真空の誘電率，透磁率といわれる定数で

$$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\mathrm{F\cdot m^{-1}} \text{（ファラッド／メーター）}$$
$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H\cdot m^{-1}} \text{（ヘンリー／メーター）}$$

という値をもつ．電荷や電流をとりまく空間が真空であるときには

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \tag{2・9}$$

の関係が成り立つ．光速 $c$ は

$$c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

と表される．電荷や電流が物質中にあるときには，(*2·9*) の代わりに

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{2·10}$$

が多くの物質中について成立する．$\varepsilon$, $\mu$ はそれぞれ物質の誘電率，透磁率である．

Maxwell の方程式 (*2·1*) と (*2·2*) から連続の方程式が導かれる．すなわち，(*2·1*) の両辺を $t$ について微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{E})=4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

となる．(*2·2*) の両辺に div を作用させると，左辺第 1 項は $\mathrm{div\ rot}\ \boldsymbol{B}=0$ のために落ちる．したがって

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{E})=4\pi\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{j}$$

となる．上記 2 式を足して連続の方程式

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{2·11}$$

が導かれる．この式は電荷の保存を保証する微分方程式である．

なお電磁場の中で運動する荷電粒子には，**ローレンツ力** (Lorentz force) が作用する．単位体積あたりの電荷に作用するこの力は

$$\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} \tag{2·12}$$

で与えられる．したがって，電磁場内での荷電粒子の運動は，この Lorentz 力をとり入れた運動方程式に従って記述される．

### A. エネルギー保存則

次に電磁場のエネルギーまで含めて，エネルギー保存則が成り立っていることを，Maxwell の方程式から導いてみよう．

まず (*2·2*) と $\boldsymbol{E}$ とのスカラー積を作り，(*2·3*) と $\boldsymbol{B}$ とのスカラー積を作って，それらの差をとると下式が求まる．

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}-\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2·13}$$

ここで，ベクトル積の発散量に対するベクトル解析の公式

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \tag{2·14}$$

を用いると，(2・13) は次のように書くことができる．

$$-\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)=\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2·15}$$

ここで

$$w=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2) \tag{2·16}$$

および

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \tag{2·17}$$

のように $w$ と $\boldsymbol{S}$ を定義しよう．(2・15) を領域 $V$ について積分し，$c/4\pi$ 倍する．さらに Gauss の定理を用いて

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{S}\,d\boldsymbol{r}=\int_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

と書き直すと下の式が得られる．

$$-\frac{d}{dt}\int_V w\,d\boldsymbol{r}=\int_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}dS+\int_V \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} \tag{2·18}$$

ここで右辺の第1項は，領域 $V$ の表面 $S$ についての積分を表している．$\boldsymbol{n}$ は微小表面 $dS$ の外向き法線方向の単位ベクトルである．

(2・18) の物理的な意味を考えてみよう．そのためには，右辺第2項をまず調べてみる必要がある．電荷が速度 $\boldsymbol{v}$ で一様に運動している場合には，電流密度 $\boldsymbol{j}$ は

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$$

とおくことができる．Lorentz 力 (2・12) と $\boldsymbol{v}$ とのスカラー積を作ると

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$$

となる．真中の辺の第2項は，$\boldsymbol{v}$ が2回入っているので零となる．上式を用いると，(2・18) の右辺の第2項は $\int_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{r}$ と表される．ここで微小時間 $dt$ の間に，粒子が $\boldsymbol{f}$ という力を受けて $d\boldsymbol{s}$ だけ移動したとき，粒子が受けた仕事の量は

$$\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{f}\cdot\frac{d\boldsymbol{s}}{dt}dt=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dt$$

である．これは単位時間あたり $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$ の仕事となる．したがって (2・18) の右辺第2項は，領域 $V$ 内の電荷が受ける Lorentz 力が単位時間にする仕事を意味している．ところで，磁場による力は常に電荷の運動方向に垂直に作用しているから，磁場の仕事は零である．したがって，Lorentz 力による仕事とは，電場のする仕事と同等である．

以上のことを含めて (2・18) を次のように解釈することができる．左辺の，領域 $V$ 内の電磁場のエネルギーの単位時間あたりの減少は，右辺のように，場が単位時間に電荷にする仕事と，領域 $V$ の表面から単位時間に外へ出て行くエネルギーとの和に等しい．これでエネルギーの保存側は，電磁現象をも含めて成り立つようにすることができる．

(2・16) の $w$ のことを**電磁場のエネルギー密度**といい，それを全空間で積分した量

$$W=\int w\,d\boldsymbol{r}=\frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)d\boldsymbol{r} \tag{2・19}$$

を**電磁場の全エネルギー**という．(2・17) の $\boldsymbol{S}$ は**ポインティング・ベクトル** (Poynting vector) といわれるもので，単位時間に単位面積を通るエネルギーの流れを表す．

### B. 運動量保存則

次に運動量保存側が Maxwell の方程式から導かれることを示そう．まず，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ とのベクトル積 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ の時間微分

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

を考えてみよう．Maxwell の方程式 (2・2)，(2・3) を利用して，電磁場の時間微分を含む項を消去すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})&=(c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}-4\pi\,\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{B}-c\,\boldsymbol{E}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\\&=c[(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}]-4\pi\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{2・20}$$

となる．

ここで，次の式によって，Maxwell の電気的および磁気的応力テンソルを導入する．

$$\begin{pmatrix} T_{xx}{}^e & T_{xy}{}^e & T_{xz}{}^e \\ T_{yx}{}^e & T_{yy}{}^e & T_{yz}{}^e \\ T_{zx}{}^e & T_{zy}{}^e & T_{zz}{}^e \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E_x{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_{xx}{}^m & T_{xy}{}^m & T_{xz}{}^m \\ T_{yx}{}^m & T_{yy}{}^m & T_{yz}{}^m \\ T_{zx}{}^m & T_{zy}{}^m & T_{zz}{}^m \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} B_x{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 & B_xB_y & B_xB_z \\ B_yB_x & B_y{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 & B_yB_z \\ B_zB_x & B_zB_y & B_z{}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2 \end{pmatrix}$$

これら2つのテンソルの和 $T_{ik}=T_{ik}{}^e+T_{ik}{}^m$ は，単に，**Maxwell の応力テンソル**と呼ばれる．

$\sum\limits_{i=x,y,z}\partial T_{ik}/\partial x_i$ を $k$ 成分とするベクトルを div $\boldsymbol{T}$ と書き，まず，div $\boldsymbol{T}^e$ を計算しよう．

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{T}^e)_x &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}(E_x{}^2-E_y{}^2-E_z{}^2)+\frac{\partial}{\partial y}(E_yE_x)+\frac{\partial}{\partial z}(E_zE_x)\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)E_x-\frac{1}{4\pi}E_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \\ &\quad +\frac{1}{4\pi}E_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})E_x+\frac{1}{4\pi}((\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E})_x\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{T}^e=\frac{1}{4\pi}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+\frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E} \tag{2·21}$$

となる．同様にして

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{T}^m=\frac{1}{4\pi}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}+\frac{1}{4\pi}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B} \tag{2·22}$$

が得られる．Maxwell の方程式 (*2·1*)，(*2·4*) を代入すると，(*2·21*) と (*2·22*) との和は

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \boldsymbol{T} &= \mathrm{div}(\boldsymbol{T}^e+\boldsymbol{T}^m) \\ &= \rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{4\pi}[(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}+(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}]\end{aligned} \tag{2·23}$$

となる．さらに (*2·20*) と (*2·23*) から

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{T}=\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) \tag{2・24}$$

が得られる．右辺の第1項と第2項は，(2・12) で示したLorentzの力 $\boldsymbol{f}$ であることに注意して，任意の領域 $V$ について積分すると

$$-\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{r}=\int_V \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{r}-\int_S \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{2・25}$$

と書くことができる．右辺第2項ではGaussの定理を用いた．ただし

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} \tag{2・26}$$

であり，$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$ は $\sum_{k=x,y,z} T_{ik}n_k$ を $i$ 成分とするベクトルを意味する．

(2・25) の右辺第1項 $\int_V \boldsymbol{f}d\boldsymbol{r}$ は，領域 $V$ 内の電荷に作用するLorentz力の合力である．したがって，エネルギー保存則の場合と同様に，(2・25) を運動量の保存則を表すものと解釈することができる．すなわち，(2・26) で定義される $\boldsymbol{g}$ を電磁場の運動量密度，$(-\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})$ を領域 $V$ の表面 $S$ の単位面積を通って，単位時間に外に流れ出る運動量の流れと解釈する．たとえば，$(-T_{xx}, -T_{xy}, -T_{xz})$ は，$x$ 軸に垂直な単位面積を通って $x$ 軸方向へ単位時間に移動する運動量の $(x, y, z)$ 成分を表す．$\boldsymbol{g}$ を全空間について積分した量

$$\boldsymbol{G}=\int \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{r} \tag{2・27}$$

は**電磁場の全運動量**と呼ばれる．

## 2・2 ポテンシャルとゲージ

§1・2で述べたように，物理法則はどんな慣性系から見ても同等な形式に表現されていなければならないし，また相対論的不変性を満たしていなければならない．Maxwellの方程式はポテンシャルを導入することによって，数学的にもっと簡単な形式に表現することができ，かつ相対論的な要請を満たしていることが見ただけでわかるように書き下すことができる．

さて，$\boldsymbol{A}$ がどんなベクトルであっても，恒等的に

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$$

であるから

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{2・28}$$

とおけば，(2·4) は自動的に満たされる．次に (2·28) を (2·3) に代入すると

$$\mathrm{rot}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

となる．したがって $\boldsymbol{E}$ は一般に

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2·29}$$

とおくことができる．ここで $\phi$ は微分可能な任意関数であり，また $\mathrm{rot\,grad}\,\phi=0$ は恒等式であることに注意しなければならない．空間と時間の関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，$\phi(\boldsymbol{r},t)$ が決まれば，(2·28) と (2·29) を用いて，電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は単に微分演算で求められる．このような関数 $\boldsymbol{A}$, $\phi$ をそれぞれ，**ベクトル・ポテンシャル** (vector potential)，**スカラー・ポテンシャル** (scalar potential) という．

これらのポテンシャル $\boldsymbol{A}$, $\phi$ の時空変化を規定する方程式は，(2·28), (2·29) を Maxwell の方程式 (2·1)，(2·2) に代入することによって得られる．すなわち

$$-\Delta\phi-\frac{1}{c}\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=4\pi\rho \tag{2·30}$$

$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j} \tag{2·31}$$

となる．ここで

$$\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$$

および

$$\mathrm{div\,grad}\,\phi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=\Delta\phi$$

を用いた．(2·30) と (2·31) の連立方程式を解けば，ポテンシャル $\boldsymbol{A}, \phi$ が求まる．

ところで $\boldsymbol{A}$, $\phi$ は一義的に決まることはなく，次のような任意性がある．下記の変換で定義される $\boldsymbol{A}'$, $\phi'$ を導入してみよう．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'&=\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\Lambda\\ \phi\to\phi'&=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{2·32}$$

ここで $\Lambda$ は任意の微分可能な関数である．新しい $\boldsymbol{A}'$, $\phi'$ に対して

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A}'=\text{rot}\,\boldsymbol{A}+\text{rot grad}\,\Lambda=\text{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

また

$$\begin{aligned}-\text{grad}\,\phi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}&=-\text{grad}\,\phi+\frac{1}{c}\text{grad}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\&\quad-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}\,\Lambda)\\&=-\text{grad}\,\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

となるので，ポテンシャル $\boldsymbol{A}'$, $\phi'$ も全く同じ場の量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を与える．このことは，定まった電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を表すためのポテンシャル $\boldsymbol{A}$, $\phi$ のとり方は無限に多く存在することを意味している．(2·32) の変換は，電磁ポテンシャルに対する**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ばれる．電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ はゲージ変換に対して不変である．したがって，また，方程式 (2·30), (2·31) は $\boldsymbol{A}'$, $\phi'$ を入れても同じ形をしており，ゲージ不変である．

ゲージ変換による自由度を利用して，ポテンシャルに適当な制限を課すならば，場の方程式 (2·30), (2·31) は簡単な形に書き表される．このように，ポテンシャルに特定の制限を設けることを，**特定のゲージをとる**という．以下，ゲージの具体例を2つあげておこう．

### A. ローレンツ・ゲージ

(2·30) と (2·31) がゲージ不変であるということは，言葉を変えていえば，これらの式の解であるポテンシャルには (2·32) で表される任意性があるということである．そこで，$\boldsymbol{A}_0$, $\phi_0$ が (2·30) と (2·31) の1つの解であるとしよう．一般の解は，(2·32) によって

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}_0+\text{grad}\,\Lambda\\\phi&=\phi_0-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot33)$$

と書くことができる．いま，$\Lambda$ として，特に方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\Lambda=\text{div}\,\boldsymbol{A}_0+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi_0}{\partial t}\qquad(2\cdot34)$$

を満足するように選ぶならば

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{2・35}$$

とすることができる．実際 (2・35) の左辺に (2・33) を代入して，(2・34) を用いると，零になることがわかる．このように，(2・35) を満たすように，$\boldsymbol{A}$, $\phi$ を選ぶことができる．(2・35) の条件を**ローレンツ条件** (Lorentz condition) という．ところで，(2・34) を満足する $\Lambda$ にはまだ不定性が残っている．次式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\chi=0$$

を満たしている $\chi$ を $\Lambda$ に加えてもよい．上式で制限されたゲージ変換

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&\to\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\chi\\ \phi&\to\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

に対して，Lorentz 条件も，場の強さ $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ も共に不変である．

さて，$\boldsymbol{A}$, $\phi$ が Lorentz 条件 (2・35) を満たしているとき，場の方程式 (2・30)，(2・31) は $\boldsymbol{A}$, $\phi$ について一応別々の方程式に書かれる．

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\phi=4\pi\rho \tag{2・36}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2・37}$$

結局，副条件 (2・35) を満足するように，方程式 (2・36)，(2・37) を解けばよろしい．(2・35) によって特徴づけられるゲージのことを**ローレンツ・ゲージ** (Lorentz gauge) という．

### B. クーロン・ゲージ

(2・33) における $\Lambda$ を (2・34) のように選ぶ代わりに，方程式

$$\Delta\Lambda=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}_0 \tag{2・38}$$

を満たすように選ぶならば，(2・33) の第1式の div をとって

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{2・39}$$

となる．(2・39) は，$\Delta\chi=0$ を満たす $\chi$ を用いたゲージ変換に対して不変になっている．(2・39) が成り立っているゲージを**クーロン・ゲージ** (Coulomb gauge)，あるいは，**輻射ゲージ** (radiation gauge) という．Coulomb ゲージにおける場の方程式は

$$\Delta\phi=-4\pi\rho \tag{2・40}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)A=\frac{4\pi}{c}\,j-\frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad (2\cdot41)$$

と書くことができる．

この節では，同じ電磁場の強さ，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$，を表すのに，ポテンシャル，$\boldsymbol{A}$ と $\phi$，には不定性があることを重点的に議論した．次の節では，これらの電磁場を決める方程式，すなわち Maxwell の方程式が，観測者にとって同様に見えるということを重点にとって話を進めてみよう．

## 2·3 マクスウェル方程式の共変性

電場や磁場と Lorentz 変換との関係は，すこしばかり複雑なので，それらの変換性については後でふれることにする．**ローレンツ共変性** (Lorentz covariance) の議論には，むしろ，スカラー・ポテンシャルとベクトル・ポテンシャルとを用いて，話を進める方が見通しもよく便利である．すでに述べたように，Maxwell の方程式は，Lorentz ゲージをとるならば，(2·35) ～ (2·37) の方程式に帰着できる．したがって，これらの方程式の Lorentz 変換に対する共変性が示されれば十分である．

我々は，経験的事実として，電荷が保存することを知っている．もっと正確にいうならば，電荷の保存は，どんな慣性系に我々がいるかということには無関係に，すべての慣性系で普遍的に成り立っている．このことは，電荷の保存を表している連続の方程式 (2·11) が Lorentz 変換に対して不変であることを示している．したがって，微分演算子

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{1}{ic}\ \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

が4元ベクトルの変換性をもっていることを考慮するならば，電流密度 $\boldsymbol{j}$ と電荷密度 $\rho$ とが

$$(j_\mu)\equiv(j_x,\ j_y,\ j_z,\ ic\rho) \qquad (2\cdot42)$$

なる4元ベクトルを作っていなければならない．そうすれば，(2·11) は共変形式

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad (2\cdot43)$$

に書き表され，明らかに Lorentz 不変になっている．(2·42) の $j_\mu$ を **4元電流**

**密度** (four-current density) という．

次に電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$, $\phi$ の満たす方程式 (2・36), (2・37) の左辺のダランベルシャンが Lorentz 変換に対して不変であり，右辺の $\boldsymbol{j}$, $\rho$ が (2・42) に従って，4元ベクトル $j_\mu$ を作ることは上に述べたとおりである．そうしてみると，ベクトル・ポテンシャルとスカラー・ポテンシャルがいっしょになって，4元ベクトル

$$(A_\mu)\equiv(A_x,\ A_y,\ A_z,\ i\phi) \tag{2・44}$$

を構成するならば，場の方程式 (2・36), (2・37) の Lorentz 変換に対する共変性が確かめられたことになる．特殊相対論ではこのように期待するのが当然であるし，また (2・44) の $A_\mu$ を4元ベクトルと考えても，現在のところ実験との矛盾は起こらない．(2・36) と (2・37) を1つにまとめて，共変形式で表すと

$$\Box A_\mu=-\frac{4\pi}{c}j_\mu \qquad (\mu=1, 2, 3, 4) \tag{2・45}$$

となる．(2・35) の Lorentz 条件も

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \tag{2・46}$$

と書き表される．$A_\mu$ と $\partial/\partial x_\mu$ はそれぞれ4元ベクトルであるから，そのスカラー積である (2・46) は Lorentz 変換に対して不変である．以上の議論で明らかにされたように，Lorentz ゲージで書き表された Maxwell の方程式は，すべて共変形式になっている．

さて電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は (2・28), (2・29) に従って，ポテンシャルの微分で与えられる．スカラー・ポテンシャルやベクトル・ポテンシャルの代わりに，4元ポテンシャル $A_\mu$ を用いて表すと

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$

$$E_y=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$

$$E_z=i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$B_y=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$$B_z=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \qquad (2\cdot 47)$$

となる．そこで，4元ベクトル $A_\mu$ の微分をとり，下のように定義した2階の反対称テンソルを考えてみよう．

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (2\cdot 48)$$

(2·47) と (2·48) を比較してみると，$F_{\mu\nu}$ の各成分は，電場や磁場を用いて次のように書き表すことができる．

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \qquad (2\cdot 49)$$

それゆえ，電場や磁場は Lorentz 変換に対して，2階のテンソルの成分としての変換を受ける．

電磁場が2階のテンソル $F_{\mu\nu}$ の成分で表されることが明らかになったので，Maxwell の方程式 (2·1)～(2·4) を $F_{\mu\nu}$ で書き変えてみよう．(2·42) と (2·49) を用いて (2·1)，(2·2) を変形する．まず (2·1) の両辺に $i$ を掛けると

$$i\frac{\partial E_x}{\partial x}+i\frac{\partial E_y}{\partial y}+i\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}=\frac{4\pi}{c}j_4$$

となる．また (2·2) の $x$ 成分は

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\ \frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{14}}{\partial x_4}=\frac{4\pi}{c}j_1$$

となる．$y$ および $z$ 成分についても同様の式が得られる．したがって (2·1)，(2·2) はいっしょにして単一の共変形式

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{4\pi}{c}j_\mu \qquad (\mu=1,2,3,4) \qquad (2\cdot 50)$$

にまとめることができる．他方，(2·3) の $x$ 成分を考えると

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\ \frac{\partial B_x}{\partial t}=i\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+i\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+i\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}=0$$

が得られる．(2·4) は

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}=0$$

となる．したがって (*2・3*) と (*2・4*) をいっしょにして

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}=0 \qquad (2\cdot51)$$

と書き表される．(*2・51*) の左辺は Lorentz 変換に対し，3 階のテンソルの変換性をもっているので，変換後も同じ形の式になる．このようにして，Maxwell の方程式の Lorentz 変換に対する共変性が確かめられた．

最後に，特別な Lorentz 変換 (*1・17*) に対して，電場や磁場がどのような変換を受けるか述べておこう．(*1・17*) から，変換係数 $a_{\mu\nu}$ は次の行列で与えられる．

$$(a_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad (2\cdot52)$$

ただし

$$\beta=\frac{v}{c}, \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ところで，電磁場の成分によって構成される (*2・49*) の $F_{\mu\nu}$ が 4 次元時空における 2 階のテンソルであることはすでに示した．すなわち，変換後の $F_{\mu\nu}'$ は (*1・32*) にしたがって

$$F_{\mu\nu}'=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4}a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}F_{\lambda\rho} \qquad (2\cdot53)$$

で与えられる．(*2・53*) を各成分について，(*2・52*) を使用して具体的に書き下してみよう．たとえば，$E_x'$ は次のようにして求めることができる．

$$F_{41}'=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4}a_{4\lambda}a_{1\rho}F_{\lambda\rho}=a_{43}a_{11}F_{31}+a_{44}a_{11}F_{41}$$

$a_{\lambda\rho}$ に (*2・52*) の行列要素を入れ，また $F_{\lambda\rho}$ に (*2・49*) の値を入れると

$$iE_x'=-i\beta\gamma B_y+i\gamma E_x$$

となる．同様に他の成分についても計算を進めると

$$E_x'=(E_x-\beta B_y)\gamma, \quad B_x'=(B_x+\beta E_y)\gamma,$$
$$E_y'=(E_y+\beta B_x)\gamma, \quad B_y'=(B_y-\beta E_x)\gamma, \qquad (2\cdot54)$$

$$E_z'=E_z, \qquad B_z'=B_z$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ は4次元座標 $x_\mu$ の関数であり，$\boldsymbol{E}', \boldsymbol{B}'$ は Lorentz 変換後の4次元座標 $x_\mu'$ の関数になっていることに注意する必要がある．

## 2·4　輻射場と調和振動子

Lorentz 変換に対して共変的な Maxwell の方程式は非斉次 (inhomogeneous) であるから，その一般解は，その特解が1つわかっていれば，それに斉次 (homogeneous) 方程式の一般解を加えることによって得られる．まず斉次方程式，すなわち電荷も電流もない自由場の方程式を考えよう．Lorentz ゲージでの自由場の方程式は (2·35)〜(2.37) により

$$\Box\phi=0 \tag{2·36a}$$

$$\Box\boldsymbol{A}=0 \tag{2·37a}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{2·35}$$

で与えられる．ただし，定まった電磁場 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ からポテンシャル $\phi, \boldsymbol{A}$ を定めるのには

$$\Box\,\chi=0 \tag{2·55}$$

を満足する任意関数 $\chi$ によって与えられる“制限された”ゲージ変換

$$\left.\begin{aligned}\phi\to\phi'&=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\\ \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'&=\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}\,\chi\end{aligned}\right\} \tag{2·56}$$

の任意性があった．自由場の問題では，ポテンシャルのこの任意性を利用し，適当なゲージ変換を行なうならば，スカラー・ポテンシャル $\phi=0$ と選ぶことができる．それには，自由場の1つの解 $\phi$ が与えられたとき，方程式

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}=\phi \tag{2·57}$$

を満たすように $\chi$ が決定できれば，ゲージ変換 (2·56) によって，$\phi'=0$ とすることが可能である．ところが，いま $\phi$ は (2·36a) を満足しているので，$\Box(\partial\chi/\partial t)=0$ であるから，$\Box\,\chi=0$ となるような $\chi$ を選べる．すなわち，$\chi$ に対する制限 (2·55) と矛盾しない (2·57) の解が存在する．このように，スカラー・ポテンシャルを零に選ぶことができるのは，$\rho=0$ のおかげである．

結局，$\phi=0$ としてよいから，電磁場の方程式は

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{2·58}$$

$$\Box\,\boldsymbol{A}=0 \tag{2·59}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{2·60}$$

と書き表される．(2·58)～(2·60) で与えられる電磁場のことを，特に，**輻射場** (radiation field) という．これまでの議論は，Lorentz ゲージを用いて進められてきたが，(2·60) からわかるように，これは Coulomb ゲージにも属する．始めから Coulomb ゲージでとり扱ってみても，自由場に対して同じ結果が得られることを次に示す．自由場の方程式を Coulomb ゲージで書けば，(2·39)～(2·41) により

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{2·39}$$

$$\Delta\phi=0 \tag{2·40a}$$

$$\Box\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{2·41a}$$

となる．そこで $1/c(\partial\chi/\partial t)=\phi$ の解を求めて，ゲージ変換をすると

$$\phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}=0 \tag{2·61}$$

となる．ところが，$(1/c)\Delta(\partial\chi/\partial t)=\Delta\phi=0$ であるから，$\Delta\chi=0$ となるような $\chi$ を選べる．よって $\phi=0$ とすることができるので，(2·39)～(2·41a) は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$$

$$\Box\,\boldsymbol{A}=0$$

となり，電場，磁場はそれぞれ

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

となって，(2·58)～(2·60) が得られた．したがって，輻射場は2種のゲージで同じ微分方程式を満たすことになるので，その具体的な形も当然同等になる．

そこで，上式で与えられる輻射場の関数形を具体的に求めてみよう．いま，輻射場は一辺 $L$ の立方体の中に閉じこめられており，立方体の相対する面上の対応する点では，同一の値をとるという周期的境界条件を満足しているものと

する．このとき，輻射場は次のようなフーリエ級数に展開することができる．

$$A(\boldsymbol{r}, t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}} A_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2・62}$$

上式の和に現れる波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は，周期性の条件

$$\exp\{i[k_x x+k_y y+k_z(z+L)]\}=\exp[i(k_x x+k_y y+k_z z)]$$

より，$e^{ik_zL}=1$，すなわち

$$k_z L=2\pi n_z,\quad n_z \text{は整数}$$

でなければならない．$x$, $y$ に関しても同様であるから，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の $x$, $y$, $z$ 成分は

$$\boldsymbol{k}=(k_x, k_y, k_z)=\left(\frac{2\pi}{L}n_x,\ \frac{2\pi}{L}n_y,\ \frac{2\pi}{L}n_z\right) \tag{2・63}$$

$$(n_i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots;\ i=x, y \text{ または } z)$$

で与えられる．フーリエ級数（2・62）を（2・59）に代入し，$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ が一次独立であることを使うならば

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(-k^2 A_{\boldsymbol{k}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_{\boldsymbol{k}}}{\partial t^2}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0$$

ゆえに

$$\ddot{A}_{\boldsymbol{k}}(t)+c^2k^2A_{\boldsymbol{k}}(t)=0 \tag{2・64}$$

ただし，ドットは時間微分を表す．次に，（2・60）の付加条件を $\boldsymbol{A}$ の成分 $A_x$, $A_y$, $A_z$ で表すと

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0$$

となる．この式を（2・62）のフーリエ級数を用いて表すと

$$k_x A_{\boldsymbol{k}x}+k_y A_{\boldsymbol{k}y}+k_z A_{\boldsymbol{k}z}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)=0 \tag{2・65}$$

とならなければならない．（2・65）は輻射場のフーリエ係数 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)$ が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直であること，あるいは輻射場が横波で，したがって $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ が進行方向 $\boldsymbol{k}$ に垂直であることを示す．そこで $\boldsymbol{k}$ に垂直な平面内に2つの直交する成分 $A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ $(\lambda=1,2)$ をとると，フーリエ係数は

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}(t)=\sum_{\lambda=1,2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) \tag{2・66}$$

と書かれる．ここで，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直な，互いに直交する単位ベクトル

$$(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\rho)})=\delta_{\lambda,\rho},\quad(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)})=0 \tag{2·67}$$

で，しかも，$(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(1)},\ \boldsymbol{\varepsilon_k}^{(2)},\ \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)$ が右手系を作るように選ばれているものとする．単位ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}$ は**偏りのベクトル** (polarization vector) と呼ばれる．

(2·66) を用いて，(2·64) を成分 $A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ の方程式に書き改めると

$$\begin{aligned}&\ddot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+\omega_k{}^2A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=0 \qquad (\lambda=1,2)\\&\omega_k=c|\boldsymbol{k}|=ck\end{aligned} \tag{2·68}$$

が得られる．(2·64) と (2·68) は，古典力学以来我々になじみ深い単振動を表す式で，振動数は $\omega_k/2\pi$ である．

ところで，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は実ベクトルでなければならないので，(2·62) と (2·66) とから

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \tag{2·69}$$

と書くことができる．ここで $A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ は (2·68) を満足する量であり，その時間的変化は

$$A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=A_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{-i\omega_kt} \tag{2·70}$$

で与えられる．(2·70) において，(2·68) の解として $e^{-i\omega_kt}$ のみをとったが，たとえ他の解 $e^{i\omega_kt}$ をとったとしても，(2·69) から明らかなように，$A_{\boldsymbol{k},\lambda}$ と $A_{-\boldsymbol{k},\lambda}{}^*$ の役割が入れかわるだけである．それゆえ，(2·70) とおいても，決して一般性が失われることはない．

さて，ベクトル・ポテンシャルが (2·69) のように与えられたので，電磁場は (2·58) から微分演算によって計算することができる．(2·70) を考慮すると，電場 $\boldsymbol{E}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\&=-\frac{1}{c}\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\left[\frac{dA_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)}{dt}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\frac{dA_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)}{dt}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right]\\&=\frac{i}{cL^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\omega_k\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]\end{aligned} \tag{2·71a}$$

となる．磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)\mathrm{rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)\mathrm{rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})]$$

である．ところで

$$[\mathrm{rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})]_z=i[k_x(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})_y-k_y(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})_x]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$=i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})_z e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

であり，他の成分に対しても同様な式が成り立つので

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

また，$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$ は上式の複素共役な量である．したがって

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{i}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}-A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \quad (2\cdot71b)$$

となる．

次に，輻射場の全エネルギーと全運動量をフーリエ係数 $A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ を用いて表してみよう．これらは (2·19)，(2·27) より

$$W=\frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)d\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{G}=\frac{1}{4\pi c}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})d\boldsymbol{r}$$

で与えられるから，これらの積分を一辺 $L$ の立方体について行なえばよい．$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の直交条件

$$\frac{1}{L^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

を用いると，(2·71a) より

$$\int\boldsymbol{E}^2\,d\boldsymbol{r}=-\frac{1}{c^2}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\sum_{\lambda,\lambda'}\omega_k\omega_{k'}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}$$
$$+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}-A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$
$$-A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}]$$
$$=\frac{1}{c^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\omega_k^2\{2A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)-\sum_{\lambda'=1,2}\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')}$$
$$\times[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}(t)+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}^*(t)]\}$$

$\boldsymbol{B}$ に関しては，(2·71b) より

$$\int\boldsymbol{B}^2\,d\boldsymbol{r}=-\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\sum_{\lambda,\lambda'}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}$$
$$+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}-A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

$$-A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}]$$

ここでベクトル積の公式

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k}')$$

を用いる．$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ のときは，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k}=0$ より

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})=k^2(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})=k^2\delta_{\lambda,\lambda'}$$

$\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$ のときは，$(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot-\boldsymbol{k})=-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k})=0$ より

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)})\cdot(-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})=-k^2(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})$$

となる．したがって

$$\int \boldsymbol{B}^2\,d\boldsymbol{r}=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}k^2\{2A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+\sum_{\lambda'=1,2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})$$
$$\times[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}(t)+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}^*(t)]\}$$

ゆえに

$$W=\frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2\pi}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}k^2A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)\qquad(2\cdot72)$$

が得られる．また，$\boldsymbol{G}$ の計算においても，同様にして

$$\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\,d\boldsymbol{r}=-\frac{1}{c}\sum_{k,k'}\sum_{\lambda,\lambda'}\omega_k\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}$$
$$+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}-A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^*(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$
$$-A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k}',\lambda'}(t)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}]$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\times(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')})\boldsymbol{k}'-(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda')}$$

であり，再び $(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k})=0$ を考慮すると

$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ のとき　$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\delta_{\lambda,\lambda'}$

$\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$ のとき　$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\times(-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})=-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})$

である．そこで

$$\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})d\boldsymbol{r}=\frac{1}{c}\sum_{k}\sum_{\lambda=1,2}\omega_k\{2\boldsymbol{k}A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+\boldsymbol{k}\sum_{\lambda'=1,2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})$$
$$\times[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}(t)+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*(t)A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}^*(t)]\}$$

ところが，第2項で $\sum_{\lambda,\lambda'}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda')})(A_{\boldsymbol{k},\lambda}A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}+A_{\boldsymbol{k},\lambda}^*A_{-\boldsymbol{k},\lambda'}^*)$ は $\boldsymbol{k}$ について偶関数であるから，これらに $\boldsymbol{k}$ を掛けた第2項は $\boldsymbol{k}$ について奇関数である．したがって，$-\boldsymbol{k}$ についての和と $\boldsymbol{k}$ についての和が相殺して．零となる．ゆえ

に

$$G=\frac{1}{4\pi c}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})d\boldsymbol{r}=\frac{1}{2\pi c^2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\omega_k\boldsymbol{k}A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) \quad (2\cdot73)$$

ここで，複素量 $A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ の代わりに

$$\left.\begin{aligned} Q_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)&=\frac{1}{c\sqrt{4\pi}}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \\ P_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)&=\frac{-ik}{\sqrt{4\pi}}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)-A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot74)$$

によって実変数 $Q_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$，$P_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ を導入すると

$$A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=\frac{\pi}{k^2}[P_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)+\omega_k{}^2Q_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)]$$

と表されるから，全エネルギーと全運動量は

$$W=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}[P_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)+\omega_k{}^2Q_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)] \quad (2\cdot75)$$

$$G=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\frac{\boldsymbol{k}}{\omega_k}[P_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)+\omega_k{}^2Q_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^2(t)] \quad (2\cdot76)$$

と書き表される．(2·75) は明らかに**調和振動子**のハミルトニアンと同じ形をしている．

$P_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$，$Q_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ が正準変数であることは次のようにして示される．(2·70) より

$$\dot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=-i\omega_kA_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$$

であるから，(2·74) を利用すると

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)&=\frac{1}{c\sqrt{4\pi}}[\dot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+\dot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \\ &=\frac{-ik}{\sqrt{4\pi}}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)-A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \\ &=P_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) \\ \dot{P}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)&=\frac{-ik}{\sqrt{4\pi}}[\dot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)-\dot{A}_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \\ &=\frac{-k\omega_k}{\sqrt{4\pi}}[A_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)+A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*(t)] \\ &=-\omega_k{}^2Q_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) \end{aligned}\right\} \quad (2\cdot77)$$

(2·75) を $P_{\boldsymbol{k},\lambda}, Q_{\boldsymbol{k},\lambda}$ について偏微分し，(2·77) を考慮すると，ハミルトン

(Hamilton) の正準方程式

$$\frac{\partial W}{\partial P_{\boldsymbol{k},\lambda}} = \dot{Q}_{\boldsymbol{k},\lambda}, \qquad -\frac{\partial W}{\partial Q_{\boldsymbol{k},\lambda}} = \dot{P}_{\boldsymbol{k},\lambda} \tag{2·78}$$

が得られる．(2·78) はまさに $P_{\boldsymbol{k},\lambda}$, $Q_{\boldsymbol{k},\lambda}$ が正準共役な運動量と座標であることを物語っている．(2·75) と (2·78) により，輻射場は互いに独立な，$\boldsymbol{k}$ と $\lambda$ で規定された無限個の調和振動子の系と同等であることが証明される．$W$ はそのハミルトニアンである．

## 2·5 直線偏光と円偏光

この節では光の偏りについて述べる．問題のとり扱いを簡単にするために，$z$ 方向に伝播している，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$, 偏り $\lambda$ の光を考える．ベクトル・ポテンシャルは (2·69), (2·70) を用いると

$$\boldsymbol{A}(z,t) = \frac{1}{L^{3/2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} [A_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{i(kz-\omega_k t)} + A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^* e^{-i(kz-\omega_k t)}] \tag{2·79}$$

と書き表される．$A_{\boldsymbol{k},\lambda}$ は複素数であるから，これを

$$A_{\boldsymbol{k},\lambda} = A_0(\boldsymbol{k},\lambda) e^{i\alpha} \tag{2·80}$$

とおく．ここで，$A_0$ , $\alpha$ は実数である．(2·80) を (2·79) に代入すると

$$\boldsymbol{A}(z,t) = \frac{A_0}{L^{3/2}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} [e^{i\alpha} e^{i(kz-\omega_k t)} + e^{-i\alpha} e^{-i(kz-\omega_k t)}]$$

$$= \frac{2}{L^{3/2}} A_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} \cos(kz - \omega_k t + \alpha) \tag{2·81}$$

となる．この波は，進行方向 $\boldsymbol{k}$ ( $z$ 方向) とそれに垂直なベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}$ を含む平面内で cos 型の時空的変化を行なう平面波である．これを偏り $\lambda$ の**平面偏光**または**直線偏光**という．

もし $x$ 方向に偏った成分 $A_x$ に対する位相角 $\alpha$ を 0, $A_y$ に対する $\alpha$ を $\pi/2$ とると，$e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ だから

$$A_x(z,t) = \frac{1}{L^{3/2}} A_0 [e^{i(kz-\omega_k t)} + e^{-i(kz-\omega_k t)}]$$

$$= \frac{2}{L^{3/2}} A_0 \cos(kz - \omega_k t)$$

$$A_y(z,t) = \frac{1}{L^{3/2}} i A_0 [e^{i(kz-\omega_k t)} - e^{-i(kz-\omega_k t)}]$$

$$=-\frac{2}{L^{3/2}}A_0\sin(kz-\omega_k t)$$

となり，したがって

$$\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{2}{L^{3/2}}A_0[\boldsymbol{e}_x\cos(kz-\omega_k t)-\boldsymbol{e}_y\sin(kz-\omega_k t)] \qquad (2\cdot 82)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ は，図 2·1(a) のように，$x$, $y$ 方向の単位ベクトルである．ベクトル $\boldsymbol{A}$ は，波の進行方向に沿って見ている観測者にとっては，$z$ が一定の任意の平面内で，時計回りの方向に回転しているように見える．この事情は図 2·1(b) より明らかである．$z$ を一定にしておいて，$kz-\omega_k t=0$ となった時刻では $x$ 成分だけが存在し，さらに時間が経って $kz-\omega_k t=-\pi/2$ となるときには $y$ 成分だけになってしまう．$\boldsymbol{A}$ の偏光面が右回りになっていることを示し，これを**右回りの円偏光**という．これに対して，$A_y$ の位相角 $\alpha$ を $-\pi/2$ ととれば

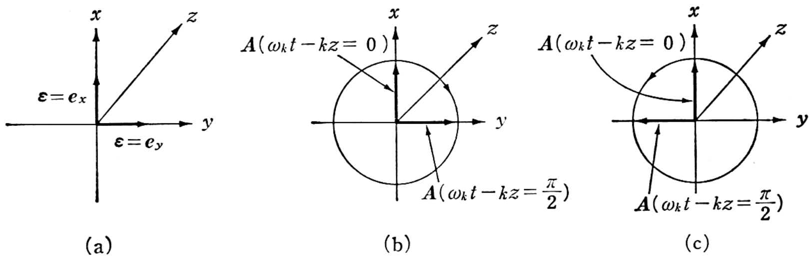



**図 2·1**　紙面の表から裏（$z$ 方向）に進む光を，紙面の手前で，光の進行方向に沿って見ている観測者から見た光の偏光状態．(a) は直線偏光（(2·81) で $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}=\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}=\boldsymbol{e}_y$ の場合を示してある．）(b) は (2·82) の場合，(c) は (2·83) の場合である．

$$A_y(z,t)=-\frac{i}{L^{3/2}}A_0[e^{i(kz-\omega_k t)}-e^{-i(kz-\omega_k t)}]$$

$$=\frac{2}{L^{3/2}}A_0\sin(kz-\omega_k t)$$

したがって

$$\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{2}{L^{3/2}}A_0[\boldsymbol{e}_x\cos(kz-\omega_k t)+\boldsymbol{e}_y\sin(kz-\omega_k t)] \qquad (2\cdot 83)$$

となり，$\boldsymbol{A}$ は反時計回りに回転しているように見える．これは図 2·1(c) に示されているように，**左回りの円偏光**に相当する．

以上をまとめると，(2・82) は右回り，(2・83) は左回りの円偏光を表す．そこで2個の独立な偏りのベクトルとして

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{(+)}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x+i\boldsymbol{e}_y)\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(-)}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x-i\boldsymbol{e}_y)\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot84)$$

と選び，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\,(\lambda=1,2)$ を $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}$ ととることができる．ただし，この場合には，(2・79) の展開において，第2項($A_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^*$ の項) に現れる $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}$ を $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)*}$ としなければならない．たとえば右回りの円偏光は

$$\boldsymbol{A}(z,t)=\frac{1}{L^{3/2}}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(+)}A_{\boldsymbol{k},+}e^{i(kz-\omega_k t)}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(+)*}A_{\boldsymbol{k},+}{}^*e^{-i(kz-\omega_k t)}\right]\qquad(2\cdot79a)$$

である．同様に左回りの円偏光は $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(-)}$を用いて表される．

## 2・6　古典論における輻射場と物質との相互作用

この節では，輻射場の中に $N$ 個の荷電粒子が存在するとき，この粒子系のハミルトニアンを古典論を用いて求めることにする．

自由粒子（相互作用がない場合の粒子）に対するハミルトニアンは，粒子の質量を $m$，運動量を $\boldsymbol{p}$ とすると，非相対論的なとり扱いでは

$$H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\qquad(2\cdot85)$$

である．電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を電荷 $e$ をもった荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動するときの運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\qquad(2\cdot86)$$

である．右辺はよく知られたLorentz力である．$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラー・ポテンシャル $\phi$ を用いて

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$$

と表されるから，これらを (2・86) に代入すると

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-e\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{e}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\qquad(2\cdot87)$$

となる．この式は，ラグランジアン $L$ を次のように選ぶと，変分原理から導か

れる．

$$L=\frac{1}{2}mv^2-e\phi+\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) \tag{2・88}$$

**変分原理**より得られる**オイラー**（Euler）**の方程式**は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,2,3 \tag{2・89}$$

$$x_1=x,\ \ x_2=y,\ \ x_3=z,$$

$$\dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}$$

である．$x_1=x$ の場合を考えてみると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=mv_x+\frac{e}{c}A_x,\ \ \frac{\partial L}{\partial x}=-e\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{e}{c}\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\frac{dv_x}{dt}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\ \frac{dz}{dt}\right)$$

であるから，これらを（2・89）に代入すると

$$m\frac{dv_x}{dt}+e\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{e}{c}\ \frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{e}{c}v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)+\frac{e}{c}v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$
$$=0$$

となる．ゆえに

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-e\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{e}{c}\ \frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A})_x$$

$y$, $z$ に対しても同様な式が成り立ち，（2・87）が得られる．共役な運動量は

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=mv_i+\frac{e}{c}A_i \tag{2・90}$$

であるから，ハミルトニアン $H$ は

$$H=\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i-L=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-L$$

ところが（2・90）より

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)$$

であるから

$$H=\frac{1}{m}\boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)-\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+e\phi-\frac{e}{mc}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+e\phi \tag{2·91}$$

となる．

スカラー・ポテンシャル $\phi$ は，Coulomb ゲージではポアッソン (Poisson) の方程式 (2·40) を解くことによって求められる．

$$\Delta\phi=-4\pi\rho \tag{2·40}$$

$N$ 個の点電荷 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ が点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ に存在するときには

$$\rho(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N} e_j\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

であるから，点 $\boldsymbol{r}_i$ にすべての電荷が作る静電ポテンシャル $\phi_i$ は

$$\phi_i=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}'|}d\boldsymbol{r}'$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{e_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \tag{2·92}$$

である．$N$ 個の点電荷の系のポテンシャル・エネルギー $U$ は

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}e_i\phi_i$$

で与えられるから，(2·92) を用いると

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \tag{2·93}$$

となる．この中には，電荷の自己エネルギー ($i=j$ に相当する) の発散項が入っているが，これは微分すれば消えるから，運動方程式に影響がないので落とす．残りは電荷の間の相互作用のエネルギーで，これを $U'$ とすると

$$U'=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\(i\neq j)}}^{N}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}=\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \tag{2·94}$$

となる．

したがって，輻射場の中に存在する $N$ 個の荷電粒子系のハミルトニアンは，Coulomb ゲージでは

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m_i}\left[\boldsymbol{p}_i-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\right]^2+\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \tag{2·95}$$

と表される．ここで，$m_i, e_i$ は $i$ 番目の粒子の質量と電荷である．(2·95) の第2項は，荷電粒子間のクーロン相互作用を表している．

# 3

# 相互作用がない場合のディラック方程式

## 3·1 クライン・ゴルドンの波動方程式

非相対論的な古典力学では，自由粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ とエネルギー $E$ との間に関係式

$$E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{3·1}$$

が成り立っている．この古典力学の公式は，巨視的な自然現象において，大変よい近似になっていることがよく知られている．しかし，分子や原子など微視的な現象を研究してみると，古典力学では不十分であり，量子力学という新しい力学が必要になってくる．そこでまず非相対論的な場合，どのようにして量子力学を作ったかということを，ごく簡単に復習しておこう．そしてこの手法をさらに相対論的な場合にも適用してみよう．

量子力学では，まず (3·1) において古典的な粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ およびエネルギー $E$ を，次のように微分演算子でおきかえる．

$$\boldsymbol{p}\to -i\hbar\nabla,\quad E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{3·2}$$

さらに (3·1) の両辺の演算子は，それぞれ波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ に作用するものとする．

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t) \tag{3·3}$$

この式を**シュレディンガー** (Schrödinger) **方程式**という．この微分方程式を，それぞれの問題に適した境界条件をつけて解くことによって，波動関数が求められる．波動関数はまた状態関数とも呼ばれ，微視的な物理系の状態を表し，

種々の物理的な量は，波動関数を用いることによって記述される．典型的な例として，次の式で定義される量の物理的な意味を調べてみよう．

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r},t)&=\psi^*\psi\\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)\end{aligned}\tag{3·4}$$

このように定義すると $\psi^*(\boldsymbol{r},t)\psi(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}$ は，時刻 $t$ において，考えている粒子が点 $\boldsymbol{r}$ を含む微小体積 $d\boldsymbol{r}(=dxdydz)$ の中に存在する確率であり，$\rho$ を**確率密度**という．粒子を体積 $V$ の中に見出す確率は $\int_V\psi^*\psi d\boldsymbol{r}$ であり，$V$ として全空間をとれば

$$\int\psi^*\psi d\boldsymbol{r}=1\tag{3·5}$$

となる．これは粒子の消滅，生成を考えない限り正しいので，さしあたりこのようなことは考えないことにする．ここで粒子の存在確率の時間的変化を求めてみると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\psi^*\psi d\boldsymbol{r}=\int_V\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)d\boldsymbol{r}\qquad(V\text{は任意})$$

となる．この式の右辺に Schrödinger 方程式 (3·3) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_V\psi^*\psi d\boldsymbol{r}&=\frac{i\hbar}{2m}\int_V[\psi^*\nabla^2\psi-(\nabla^2\psi^*)\psi]d\boldsymbol{r}\\ &=\frac{i\hbar}{2m}\int_V\mathrm{div}[\psi^*\nabla\psi-(\nabla\psi^*)\psi]d\boldsymbol{r}\\ &=\frac{i\hbar}{2m}\int_S[\psi^*\nabla\psi-(\nabla\psi^*)\psi]_n dS\end{aligned}\tag{3·6}$$

最後の行において，$S$ は積分領域 $V$ を囲む閉曲面であり，$[\quad]_n$ は面積要素 $dS$ の外向き法線方向の成分を表す．第 2 行目の式から第 3 行目の式への移行は，Gauss の定理による．(3·4) で定義された量 $\rho,\boldsymbol{j}$ を用いると，(3·6) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}=-\int_V\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r}=-\int_S j_n\,dS$$

と書くことができ，$\rho$ が確率密度であるから，$\boldsymbol{j}$ は**確率の流れ**を表すことがわかる．また $V$ は任意であるから

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0\tag{3·7}$$

となり，上式は**連続の方程式**と呼ばれる．

次に，非相対論的な量子力学を相対論的な場合に拡張しよう．相対論では (3·1) の関係式の代わりに，$E$ として質量を含んだ全エネルギーをとり，次式

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4 \tag{3·8}$$

が成り立っている．(3·8) で (3·2) のおきかえを行ない，左右両辺をそれぞれ波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ に左側から作用させると

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\hbar^2c^2\nabla^2\psi+m^2c^4\psi \tag{3·9}$$

あるいは書き直して

$$\left(\Box-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0\ ; \qquad \Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{3·10}$$

が得られる．これを**クライン・ゴルドン** (Klein–Gordon) **の波動方程式**という．Klein–Gordon 方程式 (3·9) または (3·10) は平面波の形の解

$$\psi=N_0e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)} \tag{3·11}$$

をもつ．ここで，$N_0$ は規格化定数である．この波動関数が (3·9) または (3·10) の解であるためには，これらの式に直接代入してみるとわかるように，指数関数の中に現れる数値 $E$ および $\boldsymbol{p}$ の間に，(3·8) と同様の関係式

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4$$

が成り立たなければならない．この式は，与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$ について，エネルギー $E$ には2つの解

$$E=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4} \tag{3·12}$$

があり得ることを示す．これは次に述べる**負の確率**の問題と関係がある．

さて，Klein–Gordon 方程式が1体問題の基礎方程式であれば，(3·4) と同様に確率密度 $\rho$ とその流れ $\boldsymbol{j}$ が作られ，これらが連続の方程式 (3·7) を満たさなければならない．方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\nabla^2\psi+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0 \tag{3·13}$$

に左から $\psi^*$ を掛けて得られた式から，(3·13) の複素共役な方程式に右から $\psi$ を掛けた式を引けば

$$\frac{1}{c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\psi\right)-[\psi^*\nabla^2\psi-(\nabla^2\psi^*)\psi]=0 \tag{3·14}$$

となる．そこで

$$\left.\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r},t)&=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*)\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot 15)$$

と定義すれば，(3·14) の第 1 項は $(2m/i\hbar)(\partial\rho/\partial t)$ であり，第 2 項は $(-2m/i\hbar)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}$ である．したがって

$$\frac{2m}{i\hbar}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\right)=0$$

すなわち，連続の方程式 (3·7) が成り立つ．(3·15) と (3·4) をくらべると，$\boldsymbol{j}$ は非相対論的な確率の流れと一致するが，確率密度 $\rho$ は時間微分を含んでいる．Klein–Gordon 方程式 (3·10) は時間微分について 2 階であるから，$\psi$ および $\partial\psi/\partial t$ は任意に選ぶことができる．したがって，(3·15) の $\rho$ は必ずしも時間的に正とは限らないことを意味する．このことは，確率が負の値になり得ることを示していて，確率の定義と矛盾する．実際，平面波の解 (3·11)

$$\psi=N_0e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}$$

およびその共役量

$$\psi^*=N_0{}^*e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}$$

をそれぞれについて時間微分を実行すると

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{iE}{\hbar}N_0e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)},\quad \frac{\partial\psi^*}{\partial t}=\frac{iE}{\hbar}N_0{}^*e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)}$$

となって

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}2\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)N_0{}^*N_0=\frac{E}{mc^2}|N_0|^2\qquad(3\cdot 16)$$

が導かれる．(3·12) に示されているように，$E$ は正の値も負の値もとることができる．$\rho$ の符号は $E$ の符号と同じであるから，負の確率の困難は**負のエネルギー解**の問題と結びついていることがわかる．したがって，(3·10) を 1 体問題の相対論的基礎方程式とみなすことはできない．

## 3·2 ディラック方程式

Klein–Gordon 方程式の場合，問題となるのは次の 2 点である．

(1) $E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4$ という 2 乗のエネルギー，運動量の関係式に $E\to$

$i\hbar(\partial/\partial t)$，$\boldsymbol{p}\to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ という対応をとって波動方程式を立てたために，負エネルギーの解が現れる．

（2） 時間微分について2階であるため，確率密度の中に $\partial/\partial t$ が含まれ，それゆえに $\rho$ は正定値にならない．

ディラック（Dirac）は，上で述べた相対論的1体問題がやはり存在するものと考え，かつ Klein–Gordon 方程式の困難を避ける方法を見つけた．まず負の確率密度を避けるためには，方程式は時間 $t$ について1階の微分方程式でなければならないことに注目した．そうすると時空の対称性から，空間微分についても1階でなければならない．波動方程式を

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \tag{3·17}$$

の形に書くと，$H$ の形としては次のようになる．相互作用がない場合には，$H$ は平行移動に対して不変でなければならないので，座標 $\boldsymbol{r}$ を陽に含まない．また，上の議論により，空間微分（したがって $\boldsymbol{p}$）について1階でなければならない．そうすると $H$ は

$$H=c(\alpha_1 p_x+\alpha_2 p_y+\alpha_3 p_z)+\beta mc^2 \tag{3·18}$$

という形に書くことができる．ここで，$\alpha_k (k=1,2,3)$，$\beta$ は $x,y,z,t$ に依存しない量である．では，$\alpha_k, \beta$ とは何であろうか．$\alpha_k, \beta$ に対する条件を見出すために，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ はやはり Klein–Gordon 方程式を満足するという条件をおく．(3·17) に (3·18) を代入すると

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-\left(c\sum_{k=1}^{3}\alpha_k p_k+\beta mc^2\right)\psi=0$$

または

$$\frac{1}{c}\ \frac{\partial\psi}{\partial t}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{imc}{\hbar}\beta\psi=0 \tag{3·19}$$

となる．(3·19) の両辺に左側から $(1/c)(\partial/\partial t)-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}-(imc/\hbar)\beta$ を作用させると

$$\left(\frac{1}{c}\ \frac{\partial}{\partial t}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}-\frac{imc}{\hbar}\beta\right)\left(\frac{1}{c}\ \frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\frac{imc}{\hbar}\beta\right)\psi$$
$$=\Bigg[\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{j=1}^{3}\alpha_j{}^2\frac{\partial^2}{\partial x_j{}^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\beta^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j\neq k}^{3}(\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}$$

$$-\frac{imc}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j\beta+\beta\alpha_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big]\psi=0 \tag{3·20}$$

となる．上式が Klein–Gordon 方程式 (3·10) と同一であるためには

$$\alpha_j{}^2=\beta^2=1 \qquad (j=1,2,3) \tag{3·21a}$$

$$\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=0 \qquad (j\neq k) \tag{3·21b}$$

$$\alpha_j\beta+\beta\alpha_j=0 \tag{3·21c}$$

であればよい．すなわち，$\beta, \alpha_k (k=1,2,3)$ は通常の数ではなく，正方行列であることがわかる．したがって波動関数 $\psi$ は $\beta, \alpha_k$ の行の数と同じ数をもった列ベクトルである．(3·21a, b, c) の右辺に現れる 0 および 1 は，0 行列および単位行列とみなさなければならない．$H$ はエルミート演算子であるから，$\alpha_k, \beta$ はエルミート行列であることが必要である．

$$\beta^\dagger=\beta,\ \ \alpha_k{}^\dagger=\alpha_k \qquad (k=1,2,3) \tag{3·21d}$$

$\alpha_k, \beta$ が (3·21a, b, c, d) を満たすとき，(3·19) の方程式を**ディラック** (Dirac) **方程式**という．また，$\alpha_k, \beta$ を **Dirac 行列**という．

(3·19) は物理的な解釈や，非相対論的な場合への移行についてはわかりやすい．しかし，Dirac 方程式の相対論的共変性を調べるには，もう少し時間，空間について対称的な形であることが望ましい．

そこで，まず Dirac 方程式 (3·19) に左から $\beta/i$ を掛けると

$$\Big[\beta\frac{\partial}{\partial(ict)}-i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\frac{mc}{\hbar}\Big]\psi=0 \tag{3·22}$$

となる．ここで $\gamma$ 行列を次のように定義する．

$$\gamma_k=-i\beta\alpha_k \qquad (k=1,2,3), \qquad \gamma_4=\beta \tag{3·23}$$

これら 4 個の **Dirac の $\gamma$ 行列**は上式の定義から明らかなように，エルミート行列である．また (3·21) の関係を用いると

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu,\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4) \tag{3·24}$$

であることが確かめられる．行列 $\gamma_\mu$ および $x_\mu\equiv(x,y,z,ict)$ を用いると，Dirac 方程式 (3·22) は次式のように相対論的な形に書き表される．

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\psi=0 \tag{3·25a}$$

(3·25a) のエルミート共役をとると

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x_k}\gamma_k-\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial(ict)}\gamma_4+\frac{mc}{\hbar}\psi^\dagger=0 \qquad (\gamma_\mu{}^\dagger=\gamma_\mu)$$

この式に右から $\gamma_4$ を掛け，交換関係 $\gamma_j\gamma_4=-\gamma_4\gamma_j\,(j=1,2,3)$ を用いると

$$-\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu+\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}=0, \qquad \bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma_4 \tag{3·25b}$$

を得る．上式は波動関数 $\bar{\psi}$ の満たす Dirac 方程式である．$\bar{\psi}$ を $\psi$ の**アジョイント** (adjoint) という．(*3·25a*) に左から $\bar{\psi}$ を，(*3·25b*) に右から $\psi$ を掛けて辺々引算すると

$$\bar{\psi}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu\psi=0$$

となり，結局

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)=0 \tag{3·26}$$

と書ける．そこで

$$\begin{aligned}\rho&=\psi^\dagger\psi=\bar{\psi}\gamma_4\psi\\ j_k&=c\psi^\dagger\alpha_k\psi=ic\bar{\psi}\gamma_k\psi \qquad (k=1,2,3)\end{aligned} \tag{3·27}$$

ととれば，(*3·26*) は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j}=0 \tag{3·28}$$

となり，連続の式が得られる．(*3·27*) より明らかに $\rho$ は正のスカラー密度である．また，連続の式を満足するから

$$j_\mu=(\boldsymbol{j},\,ic\rho)$$

を 4 元的な確率の流れと解釈することが許され，Klein–Gordon 方程式に現れる負の確率の困難は除かれたことになる．

## 3·3 ディラックのガンマ行列の性質

$\gamma_\mu(\mu=1,2,3,4)$ から作られる積はすべて (*3·24*) により

$$\pm\gamma_1{}^{l_1}\gamma_2{}^{l_2}\gamma_3{}^{l}\gamma_4{}^{l_4}, \qquad l_\mu=1 \text{ または } 2 \tag{3·29}$$

の形に表される．各 $l_\mu(\mu=1,2,3,4)$ は 1 または 2 の 2 通りのとり方があり，決まった $l_\mu$ に対して，±のとり方があるから，(*3·29*) から作られる異なった積の数は $2^4\times2=32$ である．これらは ±1, $\pm\gamma_\mu(\mu=1,2,3,4)$, $\pm\gamma_1\gamma_2$, $\pm\gamma_1\gamma_3$, $\pm\gamma_1\gamma_4$, $\pm\gamma_2\gamma_3$, $\pm\gamma_2\gamma_4$, $\pm\gamma_3\gamma_4$, $\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_4$, $\pm\gamma_1\gamma_3\gamma_4$, $\pm\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, $\pm\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

の32個である．異なった2つの$\gamma$行列の積6個は$\gamma_\mu\gamma_\nu(\mu\neq\nu)$とまとめて書けるが，その代わりに

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4)$$

を用いると，$\mu=\nu$では0となり，しかもエルミート行列なので都合がよい．3つの$\gamma$行列の積については，$\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$と定義された$\gamma_5$を用いると，$\gamma_5\gamma_\mu$と書ける．たとえば，$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$については

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_4=\gamma_5\gamma_4$$

となる．$1,\gamma_\mu,\gamma_\mu\gamma_\nu(\mu\neq\nu$，または$\sigma_{\mu\nu})$，$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda(\mu\neq\nu\neq\lambda$，または$\gamma_5\gamma_\mu)$，$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$は一次独立であることが，後でトレースを使って証明される．$\gamma_\mu$は4個，$\gamma_\mu\gamma_\nu$の形のものが6個，$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda$の形のものが4個，$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$が1個で，それに単位行列が1個あるから，一次独立な積の数は16個である．そこで，いま，独立な16個のエルミート行列として，次の$\Gamma_i(i=1,\cdots,16)$をとることにする．

$$\Gamma_i=\begin{cases}1\\ \gamma_\mu\qquad(\mu=1,2,3,4)\\ \sigma_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4)\\ \gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\\ i\gamma_5\gamma_\mu\qquad(\mu=1,2,3,4)\end{cases}\tag{3·30}$$

特に，$\gamma_5$は$\gamma_\mu$と(3·24)で表される交換関係を満たす．したがって，(3·24)は次のように拡張される．

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu,\nu}\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4,5)\tag{3·31}$$

付録Bに与えられているトレース（trace, Trと書く）に関する(B·11)～(B·16)の結果から明らかなように，(3·30)に与えられている16個の$\Gamma_i$のうち，トレースが0にならないのは単位行列だけである．$\Gamma_i$の具体的な形を用いると

$$\Gamma_i\Gamma_j=\begin{cases}1 & i=j\text{ の場合}\\ \Gamma_k\neq1 & i\neq j\text{ の場合}\end{cases}\tag{3·32}$$

となり

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_i\Gamma_j)=n\delta_{i,j}\tag{3·33}$$

が成り立つ．ここで$n$は$\gamma$行列の次元数である．

さて，トレースを用いて，$\Gamma_i(i=1,\cdots,16)$ が一次独立であることを証明しよう．$\Gamma_i$ が一次独立であるということは，それらの一次結合

$$a_1\Gamma_1+a_2\Gamma_2+\cdots+a_{16}\Gamma_{16}=0$$

が成り立つのは

$$a_i=0 \qquad (i=1,\cdots,16)$$

であるときに限るということである．いま $\mathrm{Tr}[\Gamma_i(a_1\Gamma_1+\cdots+a_{16}\Gamma_{16})]$ を計算してみる．

$$\sum_{i=1}^{16}a_i\Gamma_i=0$$

のとき，(3·33) より

$$\mathrm{Tr}\left(\Gamma_j\sum_{i=1}^{16}a_i\Gamma_i\right)=\sum_{i=1}^{16}a_in\delta_{i,j}=na_j=0$$

これが $j=1,\cdots,16$ のすべての $j$ について成り立つから，$\sum_i a_i\Gamma_i=0$ のとき，すべての $i$ に対して $a_i=0$ である．したがって，16 個の $\Gamma_i$ は一次独立である．

16 個の一次独立なエルミート行列 $\Gamma_i$ が存在すれば，16 個の一次独立な行列要素が存在するはずだから，$\gamma_\mu$ は 4 次の正方行列（4 行 4 列）であることが必要かつ十分である．$\gamma_\mu$ の具体的な形を一義的に決めることはできないが，もし $\gamma_4$ を対角行列にすると，次のように選ぶことができる．

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_x\\ i\sigma_x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_y\\ i\sigma_y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_z\\ i\sigma_z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix} \qquad (3\cdot34)$$

$$\gamma_4=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_5=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & -\mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ここに $\sigma_i(i=x,y,z)$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ はそれぞれ 2 行 2 列のパウリ・スピン行列，単位行列，ゼロ行列である．

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (3\cdot35)$$

上に述べられたように，$\gamma_\mu$ のこのとり方は決して一義的に決まらないことに注意してほしい．実際，$S$ を任意の 4 行 4 列のユニタリ行列とすれば，この行列 $S$ によって変換された新しい行列 $\gamma_\mu'$

$$\gamma_\mu'=S^{-1}\gamma_\mu S \qquad (3\cdot36)$$

は，やはり (3·24) を満足するから，求める行列である．逆に，(3·24) を満足する任意の行列は，適当なユニタリ行列によって，(3·34) の形に変換できる．相対論的にいろいろな物理量を求めるためには，行列 $\gamma_\mu$ のあらわな表示は必要ではない．しかし，(3·34) の表示は，Dirac 方程式の非相対論的近似をする場合には，解釈しやすい形になっているという利点がある．

(3·23) の関係式と (3·24) で与えられた $\gamma_\mu$ を用いると

$$\beta=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0 & \sigma_x\\ \sigma_x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0 & \sigma_y\\ \sigma_y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (3\cdot37)$$

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}0 & \sigma_z\\ \sigma_z & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

となる．

## 3·4 ディラック方程式の相対論的不変性

Dirac 方程式は相対論的な方程式として求められたのであるから，Maxwell の方程式と同様に（§2·3 参照），Lorentz 変換に対して共変的でなければならない．そのためには，次の 2 つの要請を満足する必要がある．第 1 に，ある座標系 $x$ で，ある状態を $\psi(x)$ で表したとき，別の座標系 $x'$ では，この状態が $\psi'(x')$ で表されたとする．この場合

$$\psi'(x')=S\psi(x) \qquad \left(\psi_\rho'(x')=\sum_{\sigma=1}^{4}S_{\rho\sigma}\psi_\sigma(x)\right) \qquad (3\cdot38)$$

で表される一次変換 $S$ の存在を証明し，$S$ の形を与えなければならない．第 2 に，相対論的共変性の要請から $\psi'(x')$ は

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial\psi'(x')}{\partial x_\mu'}+\frac{mc}{\hbar}\psi'(x')=0 \qquad (3\cdot39)$$

を満たさなければならない．

さて $S$ を求めるために，(3·39) の $x_\mu'$ の微分を Lorentz 変換を用いて $x_\mu$ の微分で書き表す．§1·4 で述べたように，$\partial/\partial x_\mu$ は Lorentz 変換に対して 4 元ベクトルの $\mu$ 成分と考えられるから

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu'}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

と変換される．

そこで (3·39) は，上式と (3·38) を用いて

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\gamma_\mu S a_{\mu\nu}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\nu}+\frac{mc}{\hbar}S\psi(x)=0 \qquad (3\cdot 40)$$

次に (3·40) の両辺に左から $S^{-1}$ を掛けると

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}S^{-1}\gamma_\mu S a_{\mu\nu}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\nu}+\frac{mc}{\hbar}\psi(x)=0 \qquad (3\cdot 41)$$

を得る．この式が $\psi(x)$ の満たす Dirac 方程式 (3·25a) と同一となる条件は

$$\sum_{\mu=1}^{4}S^{-1}\gamma_\mu S a_{\mu\nu}=\gamma_\nu \qquad (\nu=1,2,3,4) \qquad (3\cdot 42)$$

である．(3·42) の両辺に $a_{\rho\nu}$ を掛けて，$\nu$ について和をとると

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}S^{-1}\gamma_\mu S a_{\mu\nu}a_{\rho\nu}=\sum_{\mu=1}^{4}S^{-1}\gamma_\mu S\delta_{\mu,\rho}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\rho\nu}\gamma_\nu$$

を得る．したがって，Dirac 方程式が相対論的に不変であるためには，$S$ は

$$S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\gamma_\nu \qquad (3\cdot 43)$$

を満たさなければならない．そこで，次に (3·43) を満たす $S$ の存在を，任意の Lorentz 変換に対して証明しよう．ここで，まず Lorentz 変換として，無限小変換を考えることにする（有限な変換は，この無限小変換の繰返しによって達せられる）．

**無限小 Lorentz 変換**は

$$x_\mu'=x_\mu+\sum_{\nu=1}^{4}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu \qquad (3\cdot 44)$$

である．すなわち (1·26) の $a_{\mu\nu}$ は

$$a_{\mu\nu}=\delta_{\mu,\nu}+\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (3\cdot 45)$$

である．$\varepsilon_{\mu\nu}$ は 1 にくらべて十分小さい量である．直交条件 (1·28) へ (3·45) を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{\rho=1}^{4}a_{\mu\rho}a_{\nu\rho}&=\sum_{\rho=1}^{4}(\delta_{\mu,\rho}+\varepsilon_{\mu\rho})(\delta_{\nu,\rho}+\varepsilon_{\nu\rho})\\&=\delta_{\mu,\nu}+(\varepsilon_{\mu\nu}+\varepsilon_{\nu\mu})+O(\varepsilon^2)\\&=\delta_{\mu,\nu}\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon_{\mu\nu}$について1次の項までとると

$$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu} \tag{3·46}$$

という条件が求まる．

次に行列$S$を

$$S=1+\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}T_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}, \quad T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu} \tag{3·47}$$

とおき，行列$T_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,3,4)$の形を求めてみよう．ここで$T_{\mu\nu}$が$\mu,\nu$に対して反対称としたが，もし対称の部分があっても，$\mu,\nu$についての足し算で零となるので書く必要がない．(3·43) の両辺に左から$S$を掛け

$$\gamma_\mu S=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}S\gamma_\nu \tag{3·48}$$

と書き直して，(3·45) および (3·47) を代入すると

$$\gamma_\mu\left(1+\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T_{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}\right)=\sum_{\nu=1}^{4}(\delta_{\mu,\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})\left(1+\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T_{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}\right)\gamma_\nu \tag{3·49}$$

となる．(3·49) の右辺で$\varepsilon_{\mu\nu}$について1次の項までとり，$\varepsilon_{\mu\nu}$の係数を比較すると

$$\frac{1}{2}\gamma_\mu\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T_{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}-\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}T_{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma}\gamma_\mu=\sum_{\nu=1}^{4}\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{3·50}$$

ここで$\varepsilon_{\mu\nu}$の反対称性を用いると，右辺は次のように書き表される．

$$\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\varepsilon_{\rho\sigma}(\delta_{\rho,\mu}\gamma_\sigma-\delta_{\mu,\sigma}\gamma_\rho) \tag{3·51}$$

(3·51) を (3·50) に代入し，$\varepsilon_{\rho\sigma}$の反対称化された係数を等しいとおくと

$$[\gamma_\mu, T_{\rho\sigma}]\equiv\gamma_\mu T_{\rho\sigma}-T_{\rho\sigma}\gamma_\mu=\delta_{\rho,\mu}\gamma_\sigma-\delta_{\sigma,\mu}\gamma_\rho \quad (\mu,\rho,\sigma=1,2,3,4) \tag{3·52}$$

となる．$T_{\rho\sigma}$として

$$T_{\rho\sigma}=\frac{1}{4}(\gamma_\rho\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\rho) \tag{3·53}$$

とおけば，(3·52) を満たすことが容易にわかる．したがって，無限小 Lorentz 変換に対しては，$S$の存在が確かめられ，その具体的な形も求められた．また，無限小変換を積み上げていって到達できる固有 Lorentz 変換についての$S$の存在も結論される．ここで Lorentz 変換の係数$a_{\mu\nu}$の作る行列の行列式$\det(a_{\mu\nu})=1$のものを**固有** (proper) **Lorentz 変換**，$\det(a_{\mu\nu})=-1$のものを**非固有** (improper) **Lorentz 変換**という．

我々は上で固有 Lorentz 変換について議論したが，非固有な変換，たとえば

空間反転や時間反転は，無限小 Lorentz 変換によっては得られない．そこで，空間反転について考えてみよう．

**空間反転**は次のように定義される．

$$x_k' = -x_k \qquad (k=1,2,3)$$
$$x_4' = x_4 \qquad (3\cdot 54)$$

すなわち，(*1・26*) の $a_{\mu\nu}$ は

$$a_{ij} = -\delta_{i,j} \qquad (i,j=1,2,3)$$
$$a_{44} = 1 \qquad (3\cdot 55)$$
$$a_{4i} = a_{i4} = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

である．(*3・48*) と (*3・55*) を用いると，$S$ に対する条件が次のように求められる．

$$\gamma_k S = \sum_{\nu=1}^{4} a_{k\nu} S \gamma_\nu = \sum_{j=1}^{3} (-\delta_{k,j}) S \gamma_j$$
$$= -S\gamma_k \qquad (k=1,2,3) \qquad (3\cdot 56)$$
$$\gamma_4 S = \sum_{\nu=1}^{4} a_{4\nu} S \gamma_\nu = S\gamma_4$$

(*3・56*) を満たす解は

$$S = \gamma_4 \qquad (3\cdot 57)$$

である．

**時間反転**は

$$x_k' = x_k \qquad (k=1,2,3)$$
$$x_4' = -x_4 \qquad (3\cdot 58)$$

で与えられる．このとき (*1・26*) の $a_{\mu\nu}$ は

$$a_{ij} = \delta_{i,j} \qquad (i,j=1,2,3)$$
$$a_{44} = -1 \qquad (3\cdot 59)$$
$$a_{4i} = a_{i4} = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

である．$S$ に対する条件は

$$\gamma_k S = \sum_{\nu=1}^{4} a_{k\nu} S \gamma_\nu = S\gamma_k \qquad (k=1,2,3)$$
$$\gamma_4 S = \sum_{\nu=1}^{4} a_{4\nu} S \gamma_\nu = -S\gamma_4 \qquad (3\cdot 60)$$

(*3・60*) を満たす $S$ は

$$S=\gamma_4\gamma_5 \tag{3·61}$$

である．

このように，空間反転や時間反転の場合にも，$S$ の存在が証明された．

## 3·5 ディラック方程式の平面波解

相互作用がないときの粒子に対する Dirac のハミルトニアンは (3·18) より

$$H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta mc^2$$

であった．交換関係 $[p_m, p_n]=0$ を用いると

$$[H, H]=0 \tag{3·62}$$

$$[\boldsymbol{p}, H]=0 \tag{3·63}$$

が得られる．(3·62) はエネルギー保存則，(3·63) は運動量保存則を表す．すなわち，エネルギー，運動量は保存量である．Dirac 方程式 (3·25a) には平面波の解が存在することが予想されるが，この解として，与えられた運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E$ の固有状態になっているものを求めることにする．$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ は 4 行 4 列の行列であるから，波動関数 $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ は 4 成分をもった列ベクトルである．$\psi(\boldsymbol{r}, t)$ を

$$\left.\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r}, t)&=w\exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-\frac{i}{\hbar}Et\right)\\ w&=\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{3·64}$$

とおく．$w_\mu(\mu=1,2,3,4)$ は $\boldsymbol{r}, t$ によらない量である．(3·64) の式を (3·25a) に代入すると

$$\sum_{\nu=1}^{4}[ic(p_x\gamma_1+p_y\gamma_2+p_z\gamma_3)-\gamma_4E+mc^2]_{\mu\nu}w_\nu=0 \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{3·65}$$

となる．(3·34) に与えられた $\gamma_\mu$ を用いて，上式を陽に書き表すと

$$(E-mc^2)w_1-cp_zw_3-c(p_x-ip_y)w_4=0 \tag{3·66a}$$

$$(E-mc^2)w_2-c(p_x+ip_y)w_3+cp_zw_4=0 \tag{3·66b}$$

$$-cp_zw_1-c(p_x-ip_y)w_2+(E+mc^2)w_3=0 \tag{3·66c}$$

$$-c(p_x+ip_y)w_1+cp_zw_2+(E+mc^2)w_4=0 \tag{3·66d}$$

となる．この方程式は $w_\mu(\mu=1,2,3,4)$ について連立斉一次方程式であるから，$w_\mu\equiv 0$ でない解をもつためには，$w_\mu$ の係数行列式が零でなければならない．すなわち

$$\begin{vmatrix} (E-mc^2) & 0 & -cp_z & -c(p_x-ip_y) \\ 0 & (E-mc^2) & -c(p_x+ip_y) & cp_z \\ -cp_z & -c(p_x-ip_y) & (E+mc^2) & 0 \\ -c(p_x+ip_y) & cp_z & 0 & (E+mc^2) \end{vmatrix}$$

$$=(E^2-c^2\boldsymbol{p}^2-m^2c^4)^2=0 \tag{3·67}$$

でなければならない．これは $E^2=c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4$ で，(3·8) にほかならない．したがって $\boldsymbol{p}$ に対して，Klein-Gordon 方程式と同じ結果，$E=\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}$ と，正と同時に負のエネルギーの解が再び許されることになる．

$$E=\pm E_p,\quad E_p=\sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4} \tag{3·68}$$

とおくと，(3·66a～d) の解 $w_\mu$ は，$E=+E_p$ および $E=-E_p$ に対する解に分けることができる．

（a） $E=+E_p$ に対する解

(3·66c), (3·66d) より

$$\begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{E_p+mc^2}\begin{pmatrix} cp_z & c(p_x-ip_y) \\ c(p_x+ip_y) & -cp_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{3·69}$$

を得る．この式を (3·66a), (3·66b) に代入すると，恒等式になっていることは容易にわかり，$w_1, w_2$ は任意に選ぶことができるから，便宜上

$$w_1=1,\quad w_2=0 \tag{3·70a}$$

$$w_1=0,\quad w_2=1 \tag{3·70b}$$

と 2 つの場合に分けることにする．(3·69) を用いると，(3·70a) および (3·70b) に対して，それぞれ下記の (3·72a), (3·72b) の解が得られる．一般解は，(3·72a), (3·72b) の一次結合で与えられる．

（b） $E=-E_p$ に対する解

(3·66a), (3·66b) より

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}=\frac{-1}{E_p+mc^2}\begin{pmatrix} cp_z & c(p_x-ip_y) \\ c(p_x+ip_y) & -cp_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}$$

を得るから，$E=E_p$ の場合と同様に

$$w_3=1,\ \ w_4=0 \tag{3·71a}$$

$$w_3=0,\ \ w_4=1 \tag{3·71b}$$

と2つの場合に分けると，それぞれ，(3·72c), (3·72d) の解が得られる．以下に結果をまとめておく．

$E=+E_p(=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4})$ に対して

$$w^{(1)}(\boldsymbol{p})=N_p\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{cp_z}{E_p+mc^2}\\\dfrac{c(p_x+ip_y)}{E_p+mc^2}\end{pmatrix}\qquad N_p=\sqrt{\frac{E_p+mc^2}{2E_p}} \tag{3·72a}$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{p})=N_p\begin{pmatrix}0\\1\\\dfrac{c(p_x-ip_y)}{E_p+mc^2}\\\dfrac{-cp_z}{E_p+mc^2}\end{pmatrix} \tag{3·72b}$$

$E=-E_p$ に対して

$$w^{(3)}(\boldsymbol{p})=N_p\begin{pmatrix}\dfrac{-cp_z}{E_p+mc^2}\\\dfrac{-c(p_x+ip_y)}{E_p+mc^2}\\1\\0\end{pmatrix} \tag{3·72c}$$

$$w^{(4)}(\boldsymbol{p})=N_p\begin{pmatrix}\dfrac{-c(p_x-ip_y)}{E_p+mc^2}\\\dfrac{cp_z}{E_p+mc^2}\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3·72d}$$

となる．ここで規格化定数 $N_p$ は

$$w^{(i)\dagger}(\boldsymbol{p})w^{(i)}(\boldsymbol{p})=\sum_{\mu=1}^{4}w_\mu{}^{(i)*}(\boldsymbol{p})w_\mu{}^{(i)}(\boldsymbol{p})=1 \tag{3·73}$$

と選んだ．(3·72) が

$$w^{(i)\dagger}(\boldsymbol{p})w^{(j)}(\boldsymbol{p})=\sum_{\mu=1}^{4}w_{\mu}{}^{(i)*}(\boldsymbol{p})w_{\mu}{}^{(j)}(\boldsymbol{p})=\delta_{i,j} \qquad (3\cdot73')$$

を満たしていることは容易にわかる．

ここで，(3·72) の解で，非相対論的な場合，すなわち $E_p-mc^2\ll mc^2$ という場合を考えてみよう．このときの運動エネルギー $T$ は $T=E_p-mc^2\approx(1/2)mv^2$ ($v$ は粒子の速さ) である．(3·72a) の $w^{(1)}$ の第1成分と第3成分の比をとると $c|\boldsymbol{p}|/(E_p+mc^2)$．ところが

$$c^2|\boldsymbol{p}|^2=E_p{}^2-m^2c^4=(E_p+mc^2)(E_p-mc^2)$$

であるから，これを上の比に代入すると

$$\frac{c|\boldsymbol{p}|}{E_p+mc^2}=\sqrt{\frac{E_p-mc^2}{E_p+mc^2}}=\sqrt{\frac{T}{T+2mc^2}}\approx O\left(\frac{v}{c}\right)\ll 1$$

となる．$w^{(2)}$ についても，第2成分と第4成分の比はやはり $O(v/c)$ である．$w^{(3)},w^{(4)}$ では，第3または第4成分と第1，第2成分の比は $O(v/c)$ である．このことから，正エネルギーの解 $w^{(1)},w^{(2)}$ の第3，第4成分は第1または第2成分の $v/c$ 程度の大きさなので，非相対論的運動では無視してよいことがわかる．

ところで，後での議論の便宜上，(3·72a～d) で与えた $w^{(i)}(\boldsymbol{p})$ の代わりに，次のように $u^{(i)}(\boldsymbol{p}),v^{(i)}(\boldsymbol{p})\,(i=1,2)$ を定義して用いることにする．

$$u^{(i)}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{E_p}{mc^2}}w^{(1)}(\boldsymbol{p}) \qquad (3\cdot74a)$$

$$u^{(2)}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{E_p}{mc^2}}w^{(2)}(\boldsymbol{p}) \qquad (3\cdot74b)$$

$$v^{(1)}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{E_p}{mc^2}}w^{(4)}(-\boldsymbol{p}) \qquad (3\cdot74c)$$

$$v^{(2)}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{E_p}{mc^2}}w^{(3)}(-\boldsymbol{p}) \qquad (3\cdot74d)$$

このように，正負のエネルギーに対して，それぞれ独立な解が2つずつある．これは，後でわかるが，$|\boldsymbol{p}|=0$ とすると，$u^{(1)}(0),v^{(2)}(0)$ はスピンの $z$ 成分が $+(\hbar/2)$ に対応した解であり，$u^{(2)}(0),v^{(1)}(0)$ は $-(\hbar/2)$ に対応した解となっている．

さて，ここで4元運動量 $p_\mu$ を

$$p_1=p_x,\ \ p_2=p_y,\ \ p_3=p_z,\ \ p_4=\frac{i}{c}E_p \tag{3·75}$$

とすると，$u^{(i)}(\boldsymbol{p}), v^{(i)}(\boldsymbol{p})\ (i=1,2)$ に対する方程式は，(3·65) を用いて

$$\left(i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right)u^{(i)}(\boldsymbol{p})=0 \tag{3·76a}$$

$$\left(-i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right)v^{(i)}(\boldsymbol{p})=0 \qquad (i=1,2) \tag{3·76b}$$

となる．また

$$\bar{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})=u^{(i)\dagger}(\boldsymbol{p})\gamma_4 \tag{3·77a}$$

$$\bar{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})=v^{(i)\dagger}(\boldsymbol{p})\gamma_4 \qquad (i=1,2) \tag{3·77b}$$

と定義すると，$\bar{u}^{(i)}(\boldsymbol{p}), \bar{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})$ は

$$\bar{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})\left(i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right)=0 \tag{3·78a}$$

$$\bar{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})\left(-i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right)=0 \tag{3·78b}$$

を満たし，さらに直交性

$$\begin{aligned}
&\bar{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})u^{(j)}(\boldsymbol{p})=\delta_{i,j}\\
&\bar{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})v^{(j)}(\boldsymbol{p})=-\delta_{i,j}\\
&\bar{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})v^{(j)}(\boldsymbol{p})=\bar{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})u^{(j)}(\boldsymbol{p})=0 \qquad (i=1,2)
\end{aligned} \tag{3·79}$$

を満たすことがわかる．たとえば，(3·72a), (3·74a), (3·34) により

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{(1)}(\boldsymbol{p})u^{(1)}(\boldsymbol{p})&=\frac{E_p}{mc^2}w^{(1)\dagger}(\boldsymbol{p})\gamma_4 w^{(1)}(\boldsymbol{p})\\
&=\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}\left(1,\ 0,\ \frac{-cp_z}{E_p+mc^2},\ \frac{-c(p_x-ip_y)}{E_p+mc^2}\right)\\
&\qquad\times\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \dfrac{cp_z}{E_p+mc^2}\\ \dfrac{c(p_x+ip_y)}{E_p+mc^2}\end{pmatrix}\\
&=\frac{E_p+mc^2}{2mc^2}\left[1-\frac{c^2(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2)}{(E_p+mc^2)^2}\right]\\
&=1
\end{aligned}$$

である．

次に

$$\Lambda_+(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2mc}\left(-i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right) \tag{3·80a}$$

$$\Lambda_-(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2mc}\left(i\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu p_\mu+mc\right) \tag{3·80b}$$

によって，演算子 $\Lambda_+(\boldsymbol{p}), \Lambda_-(\boldsymbol{p})$ を導入すると，これらは次のような性質をもっていることがわかる．

$$\begin{aligned}
&\Lambda_+(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p}), && \Lambda_+(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})=0\\
&\Lambda_-(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})=0, && \Lambda_-(\boldsymbol{p})\boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})\\
&\Lambda_+(\boldsymbol{p})\Lambda_+(\boldsymbol{p})=\Lambda_+(\boldsymbol{p}), && \Lambda_-(\boldsymbol{p})\Lambda_-(\boldsymbol{p})=\Lambda_-(\boldsymbol{p})\\
&\Lambda_+(\boldsymbol{p})\Lambda_-(\boldsymbol{p})=\Lambda_-(\boldsymbol{p})\Lambda_+(\boldsymbol{p})=0, && \Lambda_+(\boldsymbol{p})+\Lambda_-(\boldsymbol{p})=1
\end{aligned} \tag{3·81}$$

これらの性質から，演算子 $\Lambda_+(\boldsymbol{p}), \Lambda_-(\boldsymbol{p})$ は正，負のエネルギーの混った一般解に作用させると，それぞれ正のエネルギー部分 $\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p})$，負のエネルギー部分 $\boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})$ をとり出す，いわゆる**射影演算子** (projection operator) であることがわかる．この射影演算子は

$$(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p}) \tag{3·82a}$$

$$(\Lambda_-(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}=-\sum_{i=1}^{2}v_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{v}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p}) \tag{3·82b}$$

と書くことができる．ここで $u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p}), v_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p})$ の各成分である．(3·79) を用いて実際に計算してみると

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta=1}^{4}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}u_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})&=\sum_{\beta=1}^{4}\left[\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\right]u_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})\\
&=\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\delta_{i,j}\\
&=u_\alpha{}^{(j)}(\boldsymbol{p})\\
\sum_{\beta=1}^{4}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}v_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})&=\sum_{\beta=1}^{4}\left[\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\right]v_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})\\
&=0
\end{aligned}$$

同様にして

$$\sum_{\beta=1}^{4}(\Lambda_-(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}u_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})=0$$

$$\sum_{\beta=1}^{4}(\Lambda_-(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}v_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})=v_\alpha{}^{(j)}(\boldsymbol{p})$$

また

$$\sum_{\gamma=1}^{4}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\gamma}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma=1}^{4}\left[\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\gamma{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\right]\left[\sum_{j=1}^{2}u_\gamma{}^{(j)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(j)}(\boldsymbol{p})\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{2}u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p})$$

$$=(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\beta}$$

$\Lambda_-(\boldsymbol{p})$ についても同様である．$u^{(i)}$ と $v^{(i)}$ の直交性より

$$\sum_{\gamma=1}^{4}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\alpha\gamma}(\Lambda_-(\boldsymbol{p}))_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma=1}^{4}(\Lambda_-(\boldsymbol{p}))_{\alpha\gamma}(\Lambda_+(\boldsymbol{p}))_{\gamma\beta}=0$$

さらに，完備性

$$\sum_{i=1}^{2}[u_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{u}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p})-v_\alpha{}^{(i)}(\boldsymbol{p})\bar{v}_\beta{}^{(i)}(\boldsymbol{p})]=\delta_{\alpha,\beta}$$

より

$$[\Lambda_+(\boldsymbol{p})+\Lambda_-(\boldsymbol{p})]_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha,\beta}$$

となって，(3·81) の性質がすべて出てくる．(3·82) の右辺に，(3·72), (3·74) を実際に代入して計算してみると，(3·80) の右辺に等しくなることを確かめることもできる．

以上の結果から Dirac 方程式の平面波解として，正エネルギーの解

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\right)\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}u^{(s)}(\boldsymbol{p})\qquad(s=1,2)\qquad(3\cdot83a)$$

と負エネルギーの解

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\right)\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}v^{(s)}(\boldsymbol{p})\qquad(s=1,2)\qquad(3\cdot83b)$$

を得た．一般解はこれらの平面波の一次結合で与えられる．

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\boldsymbol{p}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{s=1}^{2}\left[c_s(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\right)\right.$$
$$\left.+d_s{}^\dagger(\boldsymbol{p})v^{(s)}(\boldsymbol{p})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\right)\right]\qquad(3\cdot84)$$

ここで $c_s(\boldsymbol{p}), d_s{}^\dagger(\boldsymbol{p})$ は数係数である．† はここでは特に意味はなく，$d_s{}^\dagger(\boldsymbol{p})$ で 1 つの数を表すと考えていただきたい．粒子を一辺の長さ $L$ の立方体の中に閉じこめた場合には，運動量 $\boldsymbol{p}$ は周期性の条件により

$$p_x=\hbar\frac{2\pi}{L}n_x,\quad p_y=\hbar\frac{2\pi}{L}n_y,\quad p_z=\hbar\frac{2\pi}{L}n_z\qquad(3\cdot85)$$
$$(n_x, n_y, n_z=0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

となり，(3・84) の代わりに

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2}\Big[c_{\boldsymbol{p}s}u^{(s)}(\boldsymbol{p})\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\Big)+d_{\boldsymbol{p}s}{}^{\dagger}v^{(s)}(\boldsymbol{p})\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu x_\mu\Big)\Big] \tag{3・86}$$

と与えられる．$c, d^\dagger$ はここでも数係数である．とびとびの $\boldsymbol{p}$ の値を表すために添字とした．

このようにDirac方程式の形式的な解は，正エネルギーの解と負エネルギーの解が存在し，物理的には負エネルギーの解は意味をもたない．しかし，物理的でないという理由で，負エネルギーの解を捨てると，数学的に任意のDirac方程式の解が正エネルギーの解のみでは展開できないという困難に直面する．なぜなら，正エネルギーの解と負エネルギーの解とで始めて完備系を作り，任意の解が (3・84) あるいは (3・86) のように展開できるからである．この負エネルギーの解に，従来の真空に対する概念を変更することによって，物理的意味を与えることができる．これに関する議論は，後に空孔理論のところで行なう．

ここでDirac方程式に従う粒子の速度についてふれておく．Heisenbergの運動方程式（たとえば本講座14巻の量子力学（大鹿，金野著）を見よ）を用いると，粒子の速度はハミルトニアン $H$ との交換関係を用いて次の式で与えられる．

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H,x_j] \tag{3・87}$$

それゆえ，非相対論的量子力学では

$$\dot{x}_j=\frac{dx_j}{dt}=\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(r),x_j\Big]=\frac{p_j}{m}\qquad(j=1,2,3) \tag{3・88}$$

となって，速度と運動量は比例する．ところが，Dirac方程式に従う粒子では

$$H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta=\gamma_4\Big(i\sum_{j=1}^{3}\gamma_j p_j c+mc^2\Big)$$

であるから

$$\begin{aligned}\dot{x}_j&=\frac{i}{\hbar}\Big[\gamma_4\Big(i\sum_{k=1}^{3}\gamma_k p_k c+mc^2\Big),x_j\Big]=ic\gamma_4\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\delta_{k,j}\\&=ic\gamma_4\gamma_j\qquad(j=1,2,3)\end{aligned} \tag{3・89}$$

となり，運動量とは無関係になる．$(i\gamma_4\gamma_j)^2=1$ より，$i\gamma_4\gamma_j$ の固有値は ±1 となり，粒子の速度成分は光速度 $+c, -c$ をもっているように見えるが，実際の粒子（たとえば電子）は光速度で走ってはいない．このことは相対論と矛盾しているように思われる．しかし，演算子 $i\gamma_4\gamma_j$ はハミルトニアンと可換でないから（すなわち $[H, i\gamma_4\gamma_j]\neq 0$），$H$ と同時に速度を対角化することはできない．したがって，$H$ の固有状態では速度の固有値 $\pm c$ は意味をもっていない．我々が観測しているのは，$ic\gamma_4\gamma_j$ の期待値のみであるから，期待値を求めてみると

$$\frac{mc^2}{E_p}u^{(i)\dagger}(\boldsymbol{p})(ic\gamma_4\gamma_j)u^{(i)}(\boldsymbol{p})=\frac{c^2p_j}{E_p}=v_j \tag{3·90}$$

となり，相対論の結果と一致する．

速度の演算子の固有値が $\pm c$ であったことは，粒子は瞬間的に光速度 $+c$ あるいは $-c$ で運動していて，一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているのではないことを示す．粒子は絶えず行ったり来たりしているので，平均すると速度 $\boldsymbol{v}$ になっていると考えなければならない．このように瞬間的に粒子が光速度 $\pm c$ で運動することを **"Zitterbewegung"**（じぐざぐ運動）という．これは相対論的なとり扱いによってはじめて現れる現象である．

## 3·6 角運動量とディラック方程式の球面波解

Dirac 方程式の正および負エネルギーの解には，独立な解が 2 個ずつあった．この意味を調べるために，粒子の角運動量をとり扱うことにしよう．

粒子の軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ について，非相対論のときに用いた演算子 $\boldsymbol{l}$ を拡張して，4 行 4 列の演算子 $\boldsymbol{L}(L_1, L_2, L_3)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{L}=(L_1, L_2, L_3)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{l} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{l} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{l}=-i\hbar\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla} \tag{3·91}$$

Heisenberg の運動方程式を用いて，$\boldsymbol{L}$ の時間的変化を調べよう．Dirac のハミルトニアンとして

$$H=\gamma_4\left(i\sum_{j=1}^{3}\gamma_j p_j c+mc^2\right) \tag{3·92}$$

を用いると

$$\frac{d}{dt}L_1=\frac{i}{\hbar}[H, L_1]=c\hbar\gamma_4\left(\gamma_2\frac{\partial}{\partial x_3}-\gamma_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

となり，$dL_1/dt \neq 0$ だから，$\boldsymbol{L}$ は保存量ではない．上式を一般的に書き表すと

$$\frac{d}{dt}L_j = c\hbar\gamma_4 \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_l} \tag{3·93}$$

ここで

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} +1 & j,k,l \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶順列のとき} \\ -1 & j,k,l \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇順列のとき} \\ 0 & 2 \text{ つ以上の添字が等しいとき} \end{cases}$$

と定義する．

次に粒子が固有角運動量，すなわちスピンをもっていると仮定して，軌道角運動量と同様に，非相対論の際に用いられたスピン演算子 $\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を拡張して，4 行 4 列のスピン演算子 $\boldsymbol{\Sigma}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ を

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2}\gamma_2\gamma_3, \quad \Sigma_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2}\gamma_3\gamma_1, \\ &\Sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2}\gamma_1\gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.94}$$

と定義する．上の各式の右辺のように，2 つの $\gamma$ 行列の積で表されることは，(3·34) に与えられた形を用いると確かめられる．この 4 次元の $\boldsymbol{\Sigma}$ 行列は，2 次元の $(\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ と同じ交換関係を満たす．すなわち

$$\Sigma_1\Sigma_2 - \Sigma_2\Sigma_1 = i\hbar\Sigma_3, \quad \Sigma_2\Sigma_3 - \Sigma_3\Sigma_2 = i\hbar\Sigma_1, \quad \Sigma_3\Sigma_1 - \Sigma_1\Sigma_3 = i\hbar\Sigma_2 \tag{3·95}$$

したがって演算子 $\boldsymbol{\Sigma}$ はスピンを記述する．$\boldsymbol{\Sigma}$ の時間的変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma_1 &= \frac{i}{\hbar}[H, \Sigma_1] = \frac{i}{\hbar}\left[\gamma_4\left(i\sum_{j=1}^{3}\gamma_j p_j c + mc^2\right), -\frac{i\hbar}{2}\gamma_2\gamma_3\right] \\ &= -ic\gamma_4(\gamma_2 p_3 - \gamma_3 p_2) = -c\hbar\gamma_4\left(\gamma_2\frac{\partial}{\partial x_3} - \gamma_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \end{aligned}$$

となり，スピン $\boldsymbol{\Sigma}$ も保存量ではない．これを一般化すると

$$\frac{d}{dt}\Sigma_j = -c\hbar\gamma_4 \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_l} \tag{3·96}$$

このように，$\boldsymbol{L}$ も $\boldsymbol{\Sigma}$ も保存量ではないが，(3·93) と (3·96) とを比較すれば，全角運動量

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Sigma} \tag{3·97}$$

は保存量となることがわかる．

このことから，Dirac 方程式に従って運動する粒子はスピン $\hbar/2$ をもち，軌道角運動量とスピンは別々には保存しないが，その和の全角運動量は保存するということが結論される．静止している粒子に対しては

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\Sigma} \tag{3·98}$$

となり

$$\Sigma_3=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{3·99}$$

であるから，平面波解 $\boldsymbol{u}^{(i)}(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{v}^{(i)}(\boldsymbol{p}),(\boldsymbol{p}=0)$ に対して

$$\begin{aligned}\Sigma_3\boldsymbol{u}^{(i)}(0)&=+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{u}^{(i)}(0)\qquad(i=1)\\&=-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{u}^{(i)}(0)\qquad(i=2)\end{aligned} \tag{3·100}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3\boldsymbol{v}^{(i)}(0)&=-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{v}^{(i)}(0)\qquad(i=1)\\&=+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{v}^{(i)}(0)\qquad(i=2)\end{aligned} \tag{3·101}$$

となる．この結果から，$\boldsymbol{u}^{(1)},\boldsymbol{u}^{(2)}$ は正エネルギーの解で，スピンの $z$ 成分が $+(\hbar/2),-(\hbar/2)$ に対応した解であることがわかる．また $\boldsymbol{v}^{(1)},\boldsymbol{v}^{(2)}$ は負エネルギーの解で，スピンの成分が $-(\hbar/2),+(\hbar/2)$ に対応した解である．これらは，それぞれ，エネルギー正で，スピンの $z$ 成分が $+(\hbar/2),-(\hbar/2)$ の反粒子の振舞いを記述していることが，§4·4 の空孔理論によって示される．

次に Dirac 方程式の解を，角運動量表示で求めてみよう．運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E$ で運動する粒子の波動関数 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ を

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3·102}$$

とおいて

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \tag{3·103}$$

へ代入すると

$$\gamma_4\left(\hbar c\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+mc^2\right)\phi(\boldsymbol{r})=E\phi(\boldsymbol{r}),\quad E=\pm E_p \tag{3·104}$$

となる．波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を角運動量部分と動径部分に分けることにする．

角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ は (3・91) および (3・94) より

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{j} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{j} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma},\quad \boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{3・105}$$

である．角運動量の2乗 $\boldsymbol{j}^2$ および $z$ 成分 $j_z$ の固有値を $j(j+1)\hbar^2, m\hbar$ とする．$j$ を**全角運動量量子数**（または単に**全角運動量**という），$m$ を**磁気量子数**という，これに対応する固有関数 $\psi_{j,m}$ を2成分の波動関数 $\xi_{j,m}, \eta_{j,m}$ を用いて

$$\psi_{j,m}=\begin{pmatrix} \xi_{j,m} \\ \eta_{j,m} \end{pmatrix} \tag{3・106}$$

とおくと，2成分の波動関数 $\xi_{j,m}, \eta_{j,m}$ は次式を満たさなければならない．

$$\boldsymbol{j}^2\chi_{j,m}(\hat{r})=\hbar^2 j(j+1)\chi_{j,m}(\hat{r}),\quad j_z\chi_{j,m}(\hat{r})=\hbar m\chi_{j,m}(\hat{r}),$$
$$(\chi_{j,m}(\hat{r})=\xi_{j,m}\ \text{または}\ \eta_{j,m}) \tag{3・107}$$

ここで $\hat{r}$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとする．

前に述べたように $\boldsymbol{L}$ は保存量ではない．しかし，パリティが保存される場合には，**軌道角運動量量子数**（または単に**軌道角運動量**）$l$ をよい量子数に選ぶことができる．実際，$j$ が与えられたときに，$l=j+1/2$ と $l=j-1/2$ とは違ったパリティに属するので，パリティを決めると，$l$ はどちらか一方の値しかとれない．したがって，$\chi_{j,m}(\hat{r})$ を $\boldsymbol{j}^2, j_z, \boldsymbol{l}^2$ の同時固有関数に選ぶことができる．$\boldsymbol{l}^2$ の固有値を $l(l+1)\hbar^2$ としたとき，$j=l+1/2$ の場合の $\chi_{j,m}(\hat{r})$ を $\chi_{j,m}{}^{(+)}(\hat{r})$，$j=l-1/2$ の場合の $\chi_{j,m}(\hat{r})$ を $\chi_{j,m}{}^{(-)}(\hat{r})$ と表すことにすると

$j=l+1/2$ の場合

$$\chi_{j,m}{}^{(+)}(\hat{r})=\sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}}\,Y_{l,m-1/2}(\hat{r})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}}\,Y_{l,m+1/2}(\hat{r})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{3・108}$$

$j=l-1/2$ の場合

$$\chi_{j,m}{}^{(-)}(\hat{r})=-\sqrt{\frac{l-m+1/2}{2l+1}}\,Y_{l,m-1/2}(\hat{r})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sqrt{\frac{l+m+1/2}{2l+1}}\,Y_{l,m+1/2}(\hat{r})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{3・109}$$

ただし，$Y_{l,m}(\hat{r})$ は球面調和関数で

$$Y_{l,m}{}^{*}(\hat{r})=(-1)^{m}Y_{l,-m}(\hat{r})$$

の性質をもっているものとする．(3·108), (3·109) は量子力学の通常の方法で求められる．たとえば本講座14巻「量子力学」の L–S 結合の項を参照．

全角運動量 $j$ と軌道角運動量 $l$ との組合せには，$j=l+1/2$ と $j=l-1/2$ の2通りがある．これを単一の新しい量子数 $\kappa$ で指定することにする．そのためには

$$\kappa=\begin{cases}-(l+1)=-(j+1/2), & j=l+1/2 \text{ のとき} \\ \quad l=j+1/2, & j=l-1/2 \text{ のとき}\end{cases} \tag{3·110}$$

と定義すればよい．$\kappa$ の値は $j=l+1/2$ のとき負の整数，$j=l-1/2$ のとき正の整数となり，ゼロはない．このような量子数 $\kappa$ を用いて，(3·108), (3·109) の $\chi_{j,m}{}^{(\pm)}(\hat{r})$ を $\chi_{\kappa,m}(\hat{r})$ と書くことにする．(3·105) より

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{j}^2-\boldsymbol{l}^2-\frac{\hbar^2}{4}\boldsymbol{\sigma}^2\right) \tag{3·111}$$

であるから，(3·108), (3·109) の解 $\chi_{\kappa,m}(\hat{r})$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_{\kappa,m}(\hat{r})&=\frac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{j}^2-\boldsymbol{l}^2-\frac{\hbar^2}{4}\boldsymbol{\sigma}^2\right)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})\\ &=\hbar\left[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}\right]\chi_{\kappa,m}(\hat{r})\\ &=-(1+\kappa)\hbar\chi_{\kappa,m}(\hat{r})\end{aligned} \tag{3·112}$$

となることがわかる．また (3·110) より

$$j=|\kappa|-\frac{1}{2}, \tag{3·113}$$

$$l=\begin{cases}\kappa, & \kappa>0 \text{ の場合} \\ -\kappa-1, & \kappa<0 \text{ の場合}\end{cases}$$

であるから，$\chi_{\kappa,m}(\hat{r})$ と $\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})$ は，$j$ の値は同じであるが，$l$ の値は互いに1だけ異なるので，空間反転に対するパリティは異なる．ここで $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}/r$ を用いて

$$\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})=-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \tag{3·114}$$

であることが証明できる．

動径部分を含めた波動関数 $\psi_{j,m}(\boldsymbol{r})$ を $\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r}), \psi_{-\kappa,m}(\boldsymbol{r})$ と表すことにする．

$\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})$ を次のように書くことができる．

$$\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix} g_\kappa(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \\ if_\kappa(r)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \tag{3·115}$$

$\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})$ の第3，第4成分が $\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})$ に比例するのは次のようにするとわかる．波動関数の角運動量部分

$$\psi_{j,m}=\begin{pmatrix} \xi_{j,m} \\ \eta_{j,m} \end{pmatrix}$$

を (*3·104*) に代入し

$$\hbar c\sum_{k=1}^{3}\gamma_4\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}=c\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix}$$

を考慮すると，(*3·104*) は

$$\left[c\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix}+mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_{j,m} \\ \eta_{j,m} \end{pmatrix}=E\begin{pmatrix} \xi_{j,m} \\ \eta_{j,m} \end{pmatrix}$$

となる．この式から

$$\eta_{j,m}=\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+mc^2}\xi_{j,m} \tag{3·116}$$

となり，これは $\eta_{j,m}$ と $\xi_{j,m}$ が異なるパリティをもつことを示している．したがって，$\xi_{j,m}$ が $\chi_{\kappa,m}$ に比例するならば，$\eta_{j,m}$ は $\chi_{-\kappa,m}$ に比例する．また，(*3·115*) において，動径部分の波動関数 $f$ の係数 $i$ は，$f$ と $g$ の満たす方程式を実にするために導入した．$\psi_{-\kappa,m}$ は

$$\psi_{-\kappa,m}(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix} g_{-\kappa}(r)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r}) \\ if_{-\kappa}(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \tag{3·117}$$

と表される．$\psi_{\kappa,m}, \psi_{-\kappa,m}$ は同じ $j$ の値をもち，$\psi_{j,m}$ の2つの独立な解である．

(*3·115*) を (*3·104*) へ代入する．(*3·116*) を導いたときのように，2行2列の行列を用いて書くと

$$-i\sum_{k=1}^{3}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})+\frac{1}{\hbar c}\begin{pmatrix} (mc^2-E)\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -(mc^2+E)\mathbf{1} \end{pmatrix}\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})=0$$

したがって，2成分の波動関数は次式を満たす．

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}[f_\kappa(r)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})]+\frac{mc^2-E}{\hbar c}g_\kappa(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})=0 \tag{3·118}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}[g_\kappa(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})]+\frac{mc^2+E}{\hbar c}f_\kappa(r)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})=0 \tag{3·119}$$

(3·118), (3·119) に対して (3·114) を利用するために，次のような書きかえをする．まず，$\boldsymbol{\sigma}$ の成分に対する交換関係

$$\sigma_j\sigma_k=\delta_{j,k}+i\varepsilon_{jkl}\sigma_l \tag{3·120}$$

($\varepsilon_{jkl}$ は (3·93) で定義した)

より，その成分が $\boldsymbol{\sigma}$ と交換する任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{3·121}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$ とおけば

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}^2=r^2$$

となるから

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})}{r}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

ここで $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})$ に再び (3·121) を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}&=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})]\\&=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\hbar r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\right)\end{aligned} \tag{3·122}$$

となる．(3·122), (3·112), (3·114) により，任意の関数 $G(r)$ に対して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}[G(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})]&=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{\hbar r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\right)[G(r)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})]\\&=-\left[\frac{dG(r)}{dr}+\frac{(1+\kappa)}{r}G(r)\right]\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})\end{aligned} \tag{3·123}$$

となる．同様にして

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}[G(r)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})]=-\left[\frac{dG(r)}{dr}+\frac{(1-\kappa)}{r}G(r)\right]\chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \tag{3·124}$$

これらの結果を (3·118), (3·119) の中の $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ に用いて書き直すと

$$\frac{dg_\kappa(r)}{dr}+\frac{1+\kappa}{r}g_\kappa(r)-\frac{(mc^2+E)}{\hbar c}f_\kappa(r)=0 \tag{3·125}$$

$$\frac{df_\kappa(r)}{dr}+\frac{1-\kappa}{r}f_\kappa(r)-\frac{(mc^2-E)}{\hbar c}g_\kappa(r)=0 \tag{3·126}$$

が得られる．$g_{-\kappa}(r), f_{-\kappa}(r)$ に対する方程式は，上式で $\kappa$ を $-\kappa$ におき直せばよい．

さて，(3・125)，(3・126) より $f_\kappa(r)$ を消去すれば

$$\frac{d^2g_\kappa(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dg_\kappa(r)}{dr}+\left(\frac{p^2}{\hbar^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}\right)g_\kappa(r)=0,\quad p=|\boldsymbol{p}| \qquad (3\cdot127)$$

となり，これは**球ベッセル関数** (spherical Bessel function) に対する方程式である．$\kappa$ により指定される軌道角運動量の量子数 $l_\kappa$ を用いれば，$\kappa(\kappa+1)=l_\kappa(l_\kappa+1)$ であるから，(3・127) の解は

$$g_\kappa(r)=j_{l_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right),\quad n_{l_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right) \qquad (3\cdot128)$$

となる．原点 $r=0$ で正則な解をとらなければならないから

$$g_\kappa(r)=j_{l_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right) \qquad (3\cdot129)$$

である．この結果を (3・125) に代入し，$f_\kappa$ を求めると

$$f_\kappa(r)=\frac{pc}{E+mc^2}S_\kappa j_{\bar{l}_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right) \qquad (3\cdot130)$$

ここで，$\bar{l}_\kappa$ は，$-\kappa$ に対する軌道角運動量の量子数であり，$S_\kappa$ は量子数 $\kappa$ の符号である．すなわち

$$S_\kappa=\begin{cases}+1 & \kappa>0\ \text{の場合}\\ -1 & \kappa<0\ \text{の場合}\end{cases} \qquad (3\cdot131)$$

$$\bar{l}_\kappa=\begin{cases}l_\kappa-1=\kappa-1 & \kappa>0\ \text{の場合}\\ l_\kappa+1=-\kappa & \kappa<0\ \text{の場合}\end{cases} \qquad (3\cdot132)$$

である．(3・130) を導く際には，球 Bessel 関数の漸化式

$$\left(\frac{d}{d\rho}+\frac{l_\kappa+1}{\rho}\right)j_{l_\kappa}(\rho)=j_{l_\kappa-1}(\rho),\quad \rho=\frac{pr}{\hbar}$$

$$\left(\frac{d}{d\rho}-\frac{l_\kappa}{\rho}\right)j_{l_\kappa}(\rho)=-j_{l_\kappa+1}(\rho),$$

を用いた．

(3・115)，(3・128)，(3・130) より正エネルギーの解 $E=+E_p$ に対して

$$\psi_{\kappa,m}{}^{(+)}(p,\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{E_p+mc^2}{\pi\hbar^3E_p}}\begin{pmatrix} j_{l_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right)\chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \\ \frac{ipc}{E_p+mc^2}S_\kappa j_{\bar{l}_\kappa}\left(\frac{pr}{\hbar}\right)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})\end{pmatrix} \qquad (3\cdot133)$$

負エネルギーの解 $E=-E_p$ に対しては

$$\psi_{\kappa,m}{}^{(-)}(p,\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{E_p+mc^2}{\pi\hbar^3E_p}}\begin{pmatrix}\dfrac{ipc}{E_p+mc^2}S_\kappa j_{l_\kappa}\left(\dfrac{pr}{\hbar}\right)\chi_{\kappa,m}(\hat{r})\\ j_{\bar{l}_\kappa}\left(\dfrac{pr}{\hbar}\right)\chi_{-\kappa,m}(\hat{r})\end{pmatrix} \tag{3·134}$$

が得られる．ここでは

$$\int_0^\infty j_l\left(\frac{pr}{\hbar}\right)j_l\left(\frac{p'r}{\hbar}\right)r^2dr=\frac{\pi\hbar^3}{2p^2}\delta(p-p') \tag{3·135}$$

を用いて

$$\int\psi_{\kappa,m}{}^{(\pm)\dagger}(p,\boldsymbol{r})\psi_{\kappa',m'}{}^{(\pm)}(p',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}=\frac{1}{p^2}\delta(p-p')\delta_{\kappa,\kappa'}\delta_{m,m'} \tag{3·136}$$

と規格化を行なっている．また

$$\int\psi_{\kappa,m}{}^{(\pm)\dagger}(p,\boldsymbol{r})\psi_{\kappa',m'}{}^{(\mp)}(p',\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}=0 \tag{3·137}$$

であるから，任意の解は，$\psi_{\kappa,m}{}^{(+)}(p,\boldsymbol{r})$，$\psi_{\kappa,m}{}^{(-)}(p,\boldsymbol{r})$ の一次結合で与えられる．(3·86) に対応した解は，数係数 $c_{\kappa,m}(p), d_{\kappa,m}{}^\dagger(p)$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r},t)=\int p^2dp\sum_{\kappa,m}\Big[&c_{\kappa,m}(p)e^{-\frac{i}{\hbar}E_pt}\psi_{\kappa,m}{}^{(+)}(p,\boldsymbol{r})\\&+d_{\kappa,m}{}^\dagger(p)(-1)^{j_\kappa+m}e^{\frac{i}{\hbar}E_pt}\psi_{\kappa,m}{}^{(-)}(p,\boldsymbol{r})\Big]\end{aligned} \tag{3·138}$$

と与えられる．ただし，$j_\kappa$ は量子数 $\kappa$ で指定される全角運動量量子数（(3·113) を見よ）である．符号 $(-1)^{j_\kappa+m}$ は，この展開式を使用するときの便宜のために導入した．

# 4

# 電磁場がある場合のディラック方程式

## 4·1 電磁場がある場合のディラック方程式

ここでは，電磁場と粒子が相互作用を行なうと，Dirac 方程式がどのように変更されるかを調べることにしよう．

電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$, $\phi$ が与えられたときに，電磁場内での荷電粒子（電荷を $e$ とする）の運動は，§2·6 で述べたように，電磁場のないときの粒子の運動方程式において，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E$ を

$$\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A},\quad E\to E-e\phi \tag{4·1}$$

とおきかえることで記述された．相対論においても，このおきかえが正しいとして，Dirac 方程式 (3·25) において，(4·1) のおきかえを行なう．4元ベクトル・ポテンシャル $A_\mu$ を (2·44) のように

$$A_1=A_x,\quad A_2=A_y,\quad A_3=A_z,\quad A_4=i\phi \tag{4·2}$$

と定義し，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E$ を量子論における演算子

$$\boldsymbol{p}\to -i\hbar\nabla,\quad E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{4·3}$$

とすれば，Dirac 方程式は

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\psi+\frac{mc}{\hbar}\psi=0 \tag{4·4a}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\bar{\psi}\gamma_\mu-\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}=0 \tag{4·4b}$$

となる．**ゲージ変換** (2·32) は

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{4·5}$$

と書かれ，$A_\mu$ と同時に $\psi$, $\bar{\psi}$ に対しても

$$\psi \to \psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda},\quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda} \tag{4·6}$$

と変換すれば，(4·4a)，(4·4b) は不変である．たとえば (4·4a) については

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\psi\right)e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}$$

であるから

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu - \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\right)\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda} + \frac{mc}{\hbar}\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\psi - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\psi - \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}\psi\right)e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda} + \frac{mc}{\hbar}\psi e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}$$

$$=0$$

となり，結局

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\psi\right) + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

となって，(4·4 a) の形に戻る．(4·4 b) の場合も同様にして確かめられる．(4·6) を**第1種のゲージ変換**といい，これに対して (4·5) を**第2種のゲージ変換**という．

(4·4a) に左から

$$\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right) - \frac{mc}{\hbar}$$

を掛けると次の式が得られる．

$$\left[\sum_{\nu=1}^{4}\gamma_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right) - \frac{mc}{\hbar}\right]\left[\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right) + \frac{mc}{\hbar}\right]\psi$$

$$= \left[\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\gamma_\nu\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0 \tag{4·7}$$

ところが，(3·31)，(3·30) により

$$\gamma_\nu\gamma_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu) + \frac{1}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)$$

$$= \delta_{\nu,\mu} + i\sigma_{\nu\mu}$$

であるから，(4·7) は

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+i\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\psi$$

$$=\left\{\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+\frac{i}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\nu,\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right]\right\}\psi$$

$$=0 \tag{4·8}$$

となる．(4.8) の2行目の第3項に現れる [ , ] は交換子である．ここで (2·48) で定義された場の強さ

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

を用いると

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\nu,\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right]$$

$$=\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\nu\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{e^2}{\hbar^2c^2}A_\nu A_\mu\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\frac{ie}{\hbar c}\ \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\frac{\partial}{\partial x_\nu}+\frac{e^2}{\hbar^2c^2}A_\mu A_\nu\right)$$

$$=-\frac{ie}{\hbar c}\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)$$

$$=-\frac{ie}{\hbar c}\sum_{\nu,\mu=1}^{4}\sigma_{\nu\mu}F_{\nu\mu}$$

したがって，(4·8) は

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+\frac{e}{2\hbar c}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi=0 \tag{4·9}$$

一方 Klein–Gordon 方程式 (3·10) に (4·1) のおきかえを行なうと

$$\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2\psi-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0 \tag{4·10}$$

を得る．(4·9) と (4·10) とをくらべると，$(e/2\hbar c)\sum_{\mu,\nu}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ の項だけ異なっている．この項は実は粒子の**スピンと電磁場の相互作用**を表していることが次の §4·2 で明らかになる．

最後に電流密度について述べることにする．(4·4a) に左から $\bar{\psi}$ を掛けると

$$\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi=\frac{1}{\hbar c^2}\sum_{\mu=1}^{4}iec\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \tag{4·11}$$

となる．右辺に現れた $iec\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ は4元ベクトル量であり（付録Cの (C·10) 参照），電磁場と相互作用を行なう項に現れていることから，電流密度と解釈す

ることができる．実際

$$j_\mu^e = iec\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{4·12}$$

とおくと，$j_\mu^e$ は確率の流れの4元ベクトル $j_\mu = ic\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ に電荷 $e$ を掛けたものであるから，$j_k^e (k=1,2,3)$ は電流密度，$j_4^e$ は電荷密度であることがわかる．電流密度の4元ベクトル $j_\mu^e$ にも，確率の流れと同様に

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial j_\mu^e}{\partial x_\mu} = 0 \tag{4·13}$$

が成り立つことは (*4·4a*) と (*4·4b*) より自明である．これを**4元電流の保存**という．

## 4·2　非相対論的近似

前節で，電磁場がある場合の方程式として

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} + \frac{e}{2\hbar c}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\psi = 0 \tag{4·9}$$

を得た．そして電磁場がある場合の Klein–Gordon 方程式 (*4·10*) との違いは，最後の項 $\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ であることがわかった．それではこの項はいったい何であろうか．その物理的意味を次に調べてみよう．それには，まず，$\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ の項を電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を用いて表してみる．(*2·49*) の電磁場と $F_{\mu\nu}$ との関係を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \sum_{\mu,\nu=1}^{4}(-i\gamma_\mu\gamma_\nu + i\delta_{\mu,\nu})F_{\mu\nu}\\ &= -i[(\gamma_1\gamma_2-\gamma_2\gamma_1)B_z + (\gamma_3\gamma_1-\gamma_1\gamma_3)B_y + (\gamma_2\gamma_3-\gamma_3\gamma_2)B_x\\ &\quad + (\gamma_4\gamma_1-\gamma_1\gamma_4)iE_x + (\gamma_4\gamma_2-\gamma_2\gamma_4)iE_y + (\gamma_4\gamma_3-\gamma_3\gamma_4)iE_z]\end{aligned} \tag{4·14}$$

さらに

$$\begin{aligned}&\gamma_1\gamma_2-\gamma_2\gamma_1 = 2i\sigma_z' && \gamma_2\gamma_3-\gamma_3\gamma_2 = 2i\sigma_x'\\ &\gamma_3\gamma_1-\gamma_1\gamma_3 = 2i\sigma_y' && \gamma_4\gamma_1-\gamma_1\gamma_4 = -2i\alpha_1\\ &\gamma_4\gamma_2-\gamma_2\gamma_4 = -2i\alpha_2, && \gamma_4\gamma_3-\gamma_3\gamma_4 = -2i\alpha_3\end{aligned}$$

ここで $\sigma_i' = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}$, $i=x,y,z$, $\sigma_i$ は2行2列の Pauli のスピン行列である．これらを (*4·14*) に代入すると

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{B} - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})$$

となる．この項の物理的な意味は，(4·9) 全体の非相対論的極限を考えると明らかになる．(4·9) を $p_\mu=-i\hbar(\partial/\partial x_\mu)$ の関係を考慮して次のように書き直す．

$$\left[\sum_{\mu=1}^{4}\left(p_\mu-\frac{e}{c}A_\mu\right)^2+m^2c^2-\frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{B}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\right]\psi=0 \qquad (4\cdot15)$$

第1項を次のように分離する．

$$\sum_{k=1}^{3}\left(p_k-\frac{e}{c}A_k\right)^2+\left(p_4-\frac{e}{c}A_4\right)^2=\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\left(\frac{E_p}{c}-\frac{e}{c}\phi\right)^2 \qquad (4\cdot16)$$

ここで

$$E_p=T+mc^2$$

とおき，$T, e\phi$ は $mc^2$ にくらべて小さいと仮定する．$T$ は粒子の運動エネルギーであるから，$T\ll mc^2$ は**非相対論的近似**になっている．この仮定により

$$\left(\frac{E_p}{c}-\frac{e}{c}\phi\right)^2=\left(\frac{T}{c}+\frac{mc^2}{c}-\frac{e}{c}\phi\right)^2$$
$$=\frac{T^2}{c^2}+m^2c^2+\frac{e^2}{c^2}\phi^2-2\frac{eT\phi}{c^2}-2me\phi+2mT$$
$$\simeq 2m(T-e\phi)+m^2c^2$$

これらの結果を (4·16) に代入すると

$$\left[\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-2m(T-e\phi)-\frac{e\hbar}{c}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{B}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\right]\psi=0$$

$2m$ で割って

$$\left[\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}-(T-e\phi)-\frac{e\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{B}-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E})\right]\psi=0 \qquad (4\cdot17)$$

を得る．

最初の2項は非相対論的な Schrödinger 方程式であり，後の2項が Dirac 方程式からの補正項である．(4·17) を2行2列の行列を用いて表すと

$$\left[\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-(T-e\phi)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{e\hbar}{2mc}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{B}\right.$$
$$\left.+i\frac{e\hbar}{2mc}\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{E}\right]\psi=0 \qquad (4\cdot18)$$

となる．$\psi$ を

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix},\quad \psi_+=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\quad \psi_-=\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \tag{4·19}$$

と表すと，(4·18) は

$$\left[\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}-(T-e\phi)-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi_++i\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\psi_-=0$$

となる．§3·5 の議論により，$\psi_-$ は $\psi_+$ の $v/c$ の程度の大きさであり，第4項 $(e\hbar/2mc)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}\psi_-$ は $e\phi\psi_+$ の項の $(v/c)^2$ の程度の大きさになるから，非相対論的近似では，$\psi_+$ を含む項のみをとればよい．そうすると，上式は

$$\left[\frac{\left(\boldsymbol{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}{2m}-(T-e\phi)-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi_+=0 \tag{4·20}$$

と表される．第3項は

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma} \tag{4·21}$$

を量子力学的磁気能率演算子と見ると，$-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ は古典電磁気学における磁気双極子 $\boldsymbol{\mu}$ の磁場 $\boldsymbol{B}$ の中の位置エネルギーと同一の形をしている．したがって，スピン 1/2 の Dirac 粒子はスピン軸の方向に固有の磁気能率 $e\hbar/2mc$ をもっていると考えられる．あるいは，粒子のスピンは $\hbar/2$ であるから，スピン演算子を $\boldsymbol{s}$ とすると

$$\boldsymbol{\mu}=g\frac{e}{2mc}\boldsymbol{s} \tag{4·22}$$

とおいて，$g$ を **$g$-因子** ($g$-factor) と呼ぶ．ここで，$s_k=(\hbar/2)\sigma_k(k=1, 2, 3)$ で，$\sigma_k$ は2行2列の Pauli のスピン行列である．(4·21) と (4·22) をくらべると，$g=2$ である．一般に，軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ をもつ粒子は，それに付随した磁気能率 $(e/2mc)\boldsymbol{L}$ をもつから，Dirac 粒子の場合，スピン角運動量に付随した磁気能率とスピン角運動量の比は2倍になっている．また，$(e/2mc)\boldsymbol{L}$ を粒子の**軌道磁気能率** (orbital magnetic moment)，スピン角運動量に付随した磁気能率を**スピン磁気能率** (spin magnetic moment) という．

これは電子についてはよい近似になっているが，陽子や中性子では大きくずれる．たとえば，陽子では，$g=5.586$ となっていて，このずれは，陽子が点状の粒子ではなく，拡がりをもつためであると考えられる．実際，陽子はクォークというスピン 1/2 の素粒子から成る複合系であると最近は考えられている．

なお，(4·21) に現れた $e\hbar/2mc$ は磁気能率のディメンジョンをもつ．$m$ が電子の質量のとき，$|e|\hbar/2mc$ を**ボーア磁子** (Bohr magneton)，$m$ が核子の質量のとき**核磁子** (nuclear magneton) という．また $|e|$ を**素電荷**(elementary charge) という．

## 4·3 水素原子の相対論的とり扱い

前節では，記号 $e$ を任意の電荷とした．この節では，記号 $e$ を素電荷とし，正とする ($e>0$).

さて，原子番号 $Z$ の原子核の電荷 $Ze$ によるクーロン場に，電荷 $-e$ の電子が束縛されている状態を相対論的にとり扱ってみよう．原子核の電荷が原点に集中しているとすれば，クーロン・ポテンシャル $\phi$ は

$$\phi=\frac{Ze}{r} \tag{4·23}$$

で与えられる．電磁場がある場合の Dirac 方程式 (4·4a) を電子に対する Schrödinger 方程式とみなすと

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=H\psi(\boldsymbol{r},t), \qquad H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c+mc^2\beta-\frac{Ze^2}{r} \tag{4·24}$$

と書ける．

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{4·25}$$

とおき，時間部分を分離すれば

$$H\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{4·26}$$

となる．

ここで全角運動量 $\boldsymbol{J}(=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Sigma})$ に対して，(3·93)，(3·96) より

$$[H,\boldsymbol{J}]=\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}c+mc^2\beta-\frac{Ze^2}{r},\boldsymbol{J}\right]$$

$$=\left[-\frac{Ze^2}{r},\ \boldsymbol{J}\right]=0 \tag{4・27}$$

であるから，$\boldsymbol{J}$ は保存量であることがわかる．したがって波動関数（(3・115)参照）

$$\psi_{\kappa,m}(\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix} g_\kappa(r)\ \chi_{\kappa,m}(\hat{r}) \\ if_\kappa(r)\,\chi_{-\kappa,m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \tag{4・28}$$

を Schrödinger 方程式 (4・26) に代入し，(3・123)，(3・124) を用いると，動径部分 $g_\kappa(r)$，$f_\kappa(r)$ の満たす方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{dg_\kappa(r)}{dr}+\frac{1+\kappa}{r}g_\kappa(r)-\frac{1}{\hbar c}\left(mc^2+E+\frac{Ze^2}{r}\right)f_\kappa(r)=0 \\ &\frac{df_\kappa(r)}{dr}+\frac{1-\kappa}{r}f_\kappa(r)-\frac{1}{\hbar c}\left(mc^2-E-\frac{Ze^2}{r}\right)g_\kappa(r)=0 \end{aligned} \tag{4・29}$$

となる．

ここで，計算の便宜上

$$\begin{aligned} &G=rg_\kappa(r), && F=rf_\kappa(r) \\ &W=E/mc^2, && \zeta=Ze^2/\hbar c, \\ &\lambda=\sqrt{1-W^2}, && x=(2mc^2/\hbar c)\lambda r \end{aligned} \tag{4・30}$$

と変数を定義すると，(4・29) は

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx}&=-\frac{\kappa}{x}G+\left(\frac{W+1}{2\lambda}+\frac{\zeta}{x}\right)F \\ \frac{dF}{dx}&=-\left(\frac{W-1}{2\lambda}+\frac{\zeta}{x}\right)G+\frac{\kappa}{x}F \end{aligned} \tag{4・31}$$

となる．ここで，$G$, $F$ のおおまかな形を知るために，$x$（したがって $r$）の大きいところでの漸近的な振舞いを調べよう．$1/x$ の程度の量を無視すると

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dx}&=\frac{W+1}{2\lambda}F \\ \frac{dF}{dx}&=-\frac{W-1}{2\lambda}G \end{aligned}\right\}\quad (x\to\infty) \tag{4・32}$$

となる．この解は $Ae^{\pm\frac{1}{2}x}$ $((1/2\lambda)\sqrt{1-W^2}=(1/2\lambda)\lambda=1/2)$ の形である．電子の束縛状態は $1-W^2>0$ の場合である．$\lambda$，したがって $x$ はこの場合実数であるから，規格化ができるためには，$e^{-\frac{1}{2}x}$ の形をとらなければならない．そこで

$$G \sim ae^{-\frac{x}{2}},\quad F \sim be^{-\frac{x}{2}}\quad (x \to \infty)$$

という漸近形をとる．ここで，定数 $a, b$ は (4・32) から

$$a : b = -\sqrt{1+W} : \sqrt{1-W}$$

という条件を満たす．さらに

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{1+W}\, e^{-\frac{x}{2}}(u_1+u_2) \\ F &= \sqrt{1-W}\, e^{-\frac{x}{2}}(u_1-u_2) \end{aligned} \tag{4・33}$$

とおきかえると，$u_1, u_2$ についての微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \left(1-\frac{\zeta W}{\lambda x}\right)u_1 - \left(\frac{\kappa}{x}+\frac{\zeta}{\lambda x}\right)u_2 \\ \frac{du_2}{dx} &= \left(-\frac{\kappa}{x}+\frac{\zeta}{\lambda x}\right)u_1 + \frac{\zeta W}{\lambda x}u_2 \end{aligned} \tag{4・34}$$

が得られる．$u_1, u_2$ を級数に展開して，上の方程式を解くことにする．

$$\begin{aligned} u_1 &= x^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \\ u_2 &= x^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k \end{aligned} \tag{4・35}$$

とおき，これらを (4・34) に代入し，$x^{\gamma+k-1}$ の係数を比較すると

$$\alpha_k(k+\gamma) = \alpha_{k-1} - \frac{W\zeta}{\lambda}\alpha_k - \left(\kappa+\frac{\zeta}{\lambda}\right)\beta_k \tag{4・36a}$$

$$\beta_k(k+\gamma) = \left(-\kappa+\frac{\zeta}{\lambda}\right)\alpha_k + \frac{W\zeta}{\lambda}\beta_k \tag{4・36b}$$

$k>0$ の場合は，これらの式から，すべての $\alpha_k$, $\beta_k$ は $\alpha_0$, $\beta_0$ によって与えられる．$k=0$ の場合

$$\left(\gamma+\frac{W\zeta}{\lambda}\right)\alpha_0 + \left(\kappa+\frac{\zeta}{\lambda}\right)\beta_0 = 0$$

$$\left(\kappa-\frac{\zeta}{\lambda}\right)\alpha_0 + \left(\gamma-\frac{W\zeta}{\lambda}\right)\beta_0 = 0$$

これらの式は，係数の行列式が零となるときに限り，$\alpha_0=\beta_0=0$ 以外の解をもつ．すなわち

$$\begin{vmatrix} \gamma+\frac{W\zeta}{\lambda} & \kappa+\frac{\zeta}{\lambda} \\ \kappa-\frac{\zeta}{\lambda} & \gamma-\frac{W\zeta}{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

が成り立たねばならない．ゆえに

$$\gamma^2-\frac{W^2\zeta^2}{\lambda^2}-\left(\kappa^2-\frac{\zeta^2}{\lambda^2}\right)=0$$

となる．(*4·30*) で与えられた $\lambda$ の値を用いると

$$\gamma^2=\kappa^2-\zeta^2$$

したがって

$$\gamma=\pm\sqrt{\kappa^2-\zeta^2}$$

が得られる．さらに，原点 $x=0$ において解が正則であるためには，正の平方根

$$\gamma=\sqrt{\kappa^2-\zeta^2} \tag{4·37}$$

でなければならない．$\gamma=-\sqrt{\kappa^2-\zeta^2}$ に対しては，$x=0$ の附近で $u_1{}^2$, $u_2{}^2$, $u_1u_2$ は $x^{2\gamma}$ の形の特異性をもつ．

$$\int_0^\infty (f^2+g^2)r^2dr=\int_0^\infty (F^2+G^2)\,dr=\frac{\hbar}{mc\lambda}\int_0^\infty e^{-x}(u_1{}^2+u_2{}^2+2Wu_1u_2)\,dx \tag{4·38}$$

が有限であるためには，$2\gamma>-1$ でなければならない．$\gamma$ が最小になるのは $\kappa^2=1$ のときで，このとき $\zeta>\sqrt{3}/2$，すなわち $Z\geq 119$ となり，$\kappa^2>1$ では，上の条件を満たす $Z$ の値はない．ゆえに，どんな $Z$ についても，原点で正則な解を得るためには，$\gamma$ は正の平方根をとることになる．$\kappa=1$ のときには $\gamma<1$ となって，$f=F/r$，$g=G/r$ は原点で正則ではないが，(*4·38*) は有限であるから，解として考えてよい．

(*4·37*) および (*4·36b*) より

$$\alpha_k=\frac{\zeta W/\lambda-\gamma-k}{\kappa-\zeta/\lambda}\beta_k=\frac{n'-k}{\kappa-\zeta/\lambda}\beta_k \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{4·39}$$

となる．ここで $\gamma$ の値として (*4·37*) を用い，$n'$ は

$$n'=\frac{\zeta W}{\lambda}-\gamma \tag{4·40}$$

とおいた．(*4·39*) を (*4·36a*) に代入すると

$$\alpha_k=-\frac{n'-k}{k(2\gamma+k)}\alpha_{k-1}=\frac{(-1)^k(n'-k)(n'-k+1)\cdots(n'-1)}{k!\,(2\gamma+1)(2\gamma+2)\cdots(2\gamma+k)}\alpha_0$$

$$=\frac{(1-n')(2-n')\cdots(k-n')}{k!\,(2\gamma+1)(2\gamma+2)\cdots(2\gamma+k)}\;\frac{n'}{\kappa-\zeta/\lambda}\beta_0 \tag{4·41}$$

$$\beta_k=(-1)^k\frac{n'(n'-1)\cdots(n'-k+1)}{k!(2\gamma+1)(2\gamma+2)\cdots(2\gamma+k)}\beta_0 \tag{4・42}$$

となる．このような係数をもった (4・35) の級数展開 $u_1, u_2$ は**合流型超幾何関数**を用いて，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} u_1&=\beta_0\frac{n'}{\kappa-\zeta/\lambda}x^\gamma F(1-n', 2\gamma+1, x) \\ u_2&=\beta_0 x^\gamma F(-n', 2\gamma+1, x) \end{aligned} \tag{4・43}$$

ここで，合流型超幾何関数 $F(a,c,x)$ は

$$\begin{aligned} F(a,c,x)&=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots \\ &=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^k}{k!} \end{aligned} \tag{4・44}$$

と定義されている．関数 (4・44) の漸近形は

$$F(a,c,x)\to\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-x)^{-a}+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^x x^{a-c}\quad(x\to\infty) \tag{4・45}$$

であるから，$F(a, c, x)$ が有限級数にならなければ，(4・33)，(4・43) および (4・45) により，$x$ の多項式を別として，$G, F$ は $e^{\frac{x}{2}}$ のように振舞うことがわかる．このような振舞いは，$G, F$ が $x$ の値が非常に大きいところで正則でないことを示している．したがって，(4・43) の級数は，有限級数でなければならない．そのためには，(4・41)，(4・42) より明らかなように，$n'$ は負でない整数

$$n'=0,1,2,\cdots \tag{4・46}$$

をとらなければならない．ここで

$$n=n'+|\kappa|\geq|\kappa| \tag{4・47}$$

という関係で結ばれる量子数 $n$ を導入すると，(4・40) および定義 (4・30) を用いて，電子の全エネルギー $E$ は

$$E_{n,\kappa}=mc^2\left[1+\left(\frac{\zeta}{n'+\gamma}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=mc^2\left[1+\frac{\left(\frac{Ze}{\hbar c}\right)^2}{(n-|\kappa|+\gamma)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4・48}$$

と与えられる．$E_{n,\kappa}$ は

$$mc^2\gamma_1\leq E_{n,\kappa}<mc^2$$

の間に存在する．$\gamma_1=\sqrt{1-\zeta^2}$ が $E_{n,\kappa}$ の最小値に対応し，これが $1S_{1/2}$ 状態の

エネルギーである．$1S_{1/2}$ 状態は $\kappa=-1$，$n'=0$，$n=1$ である．

(4・48) のエネルギー固有値に対する動径部分の固有関数 $g_\kappa(r)$，$f_\kappa(r)$ は

$$\int_0^\infty [g_\kappa{}^2(r)+f_\kappa{}^2(r)]r^2dr=1 \tag{4・49}$$

と規格化しておけば，(4・33)，(4・43) を用いて

$$g_\kappa(x)=\frac{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\sqrt{\frac{2\lambda^5(1+W)\Gamma(2\gamma+n'+1)}{n'!\zeta(\zeta-\lambda\kappa)}}\,x^{\gamma-1}e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$\times\left[-n'F(-n'+1,2\gamma+1,x)-\left(\kappa-\frac{\zeta}{\lambda}\right)F(-n',\ 2\gamma+1,\ x)\right] \tag{4・50}$$

$$f_\kappa(x)=-\frac{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\sqrt{\frac{2\lambda^5(1-W)\Gamma(2\gamma+n'+1)}{n'!\zeta(\zeta-\lambda\kappa)}}\,x^{\gamma-1}e^{-\frac{1}{2}x}$$
$$\times\left[n'F(-n'+1,2\gamma+1,x)-\left(\kappa-\frac{\zeta}{\lambda}\right)F(-n',\ 2\gamma+1,\ x)\right] \tag{4・51}$$

が得られる．例として，関数 $rg_{-1}(r)$，$rf_{-1}(r)$ を図 4・1 に示しておく．比較のために，非相対論で解いた波動関数も描いておく．

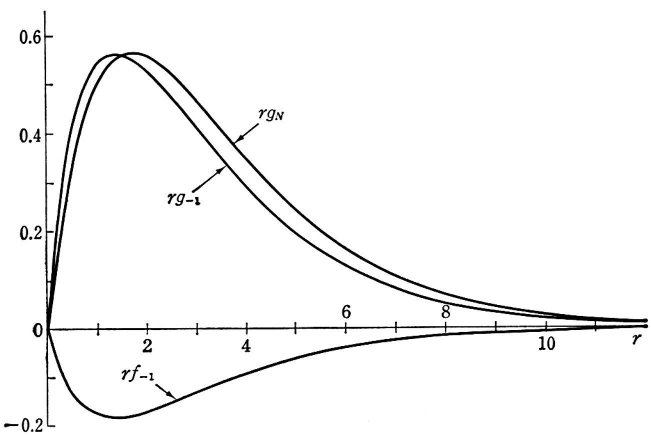



**図 4・1** $Z=82$ における $1S_{1/2}$ 状態の規格化された動径関数に $r$ を掛けた関数．横軸は $\hbar/mc$ 単位，縦軸は $(mc/\hbar)^{1/2}$ 単位である．$g_N$ は非相対論的とり扱いによる規格化された動径関数である．

(4·48) を$\left(\dfrac{\zeta}{n'+\gamma}\right)^2$について展開すると

$$E_{n,\kappa}=mc^2-\frac{1}{2}mc^2\left(\frac{\zeta}{n'+\gamma}\right)^2+\frac{3}{8}mc^2\left(\frac{\zeta}{n'+\gamma}\right)^4-\cdots$$

となる．さらに $(Ze^2/\hbar c)^2$ について展開を行なうと

$$E_{n,\kappa}=mc^2-\frac{1}{2}mc^2\frac{1}{n^2}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^2\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{1}{|\kappa|}-\frac{3}{4n}\right)\right]+\cdots$$

$$=mc^2-\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2}-\frac{mc^2}{2n^4}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^4\left(\frac{n}{|\kappa|}-\frac{3}{4}\right)+\cdots \qquad (4\cdot52)$$

となる．第1項は静止エネルギー，第2項の絶対値は非相対論的なとり扱いで得られた結合エネルギーであり，第3項は非相対論的な値に対する補正，すなわちその微細構造を表している．このように，与えられた主量子数 $n$ に対して，非相対論的とり扱いでは，エネルギー準位は1つに縮退していたが，相対論的とり扱いでは，この縮退が部分的に除かれ，角運動量 $j=|\kappa|-1/2$ の大きさの順に並んでいることがわかる．

非相対論的な結果と同じように，$n$ が大きいほど，高いエネルギー状態であることがわかる．また $n=2$ の状態は，非相対論的な結果では $2S, 2P$ 状態が縮退しているが，(4·52) からわかるように，$j$ の値が同じ状態（$\kappa$ の絶対値が同じ状態）は同じエネルギーをもつ．そして $j$ が大きいほどエネルギーが高い．したがって，$\kappa=-1$, $n=2$ で表される状態 $2S_{1/2}$ 状態と，$\kappa=1$, $n=2$ で表される $2P_{1/2}$ 状態は縮退し，それより高いエネルギー準位として，$\kappa=-2$, $n=2$ で表される $2P_{3/2}$ 状態が存在する．しかし，ラム (Lamb) の実験によれば，$2S_{1/2}$ の状態は $2P_{1/2}$ の状態にくらべて $\Delta E/h=1058\times10^6\,\mathrm{sec}^{-1}$ だけ上にずれていることがわかった．このずれは，原子内の電子に対する輻射場の影響によるものとして説明され，このエネルギーのずれを**ラム・シフト** (Lamb shift) という．

## 4·4 空孔理論と荷電共役理論

### A. Dirac の空孔理論

§3·1, 3·2 で見たように，Klein-Gordon 方程式では負の確率，負のエネルギー解が現れた．負の確率を避けるために導入された Dirac 方程式において

も，再び負のエネルギー解が現れる．この解は，理論の相対論的不変性に起因し，これを物理的に意味のない解として捨て去ることは数学的に困難であった．

通常，我々は何も存在しない状態を真空と呼んでいるが，Diracは，この真空という状態の解釈を変更することにより，上記の困難を避けることができ，また，同時にこの負エネルギーの解が新しい粒子の振舞いを記述しているとして，反粒子の存在を予言した．

自由な電子に対して許されるエネルギー領域は $E=E_p \geq mc^2$ および $E=-E_p \leq -mc^2$ で，$-mc^2 < E < mc^2$ の禁止帯をはさんで2つの領域に分かれている．図4·2にこの様子を表してある．そこでもし，正エネルギー状態にあった電子が，他の系との電磁相互作用により，$2mc^2$ 以上のエネルギーをもつ光を放出すると，負エネルギー状態に落ちこむことが可能となり，電子は安定ではあり得なくなってしまう．

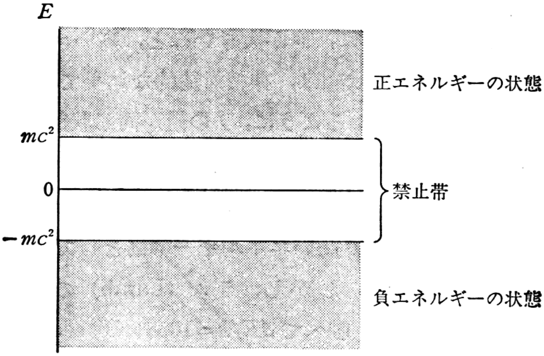



**図 4·2**　電子のエネルギー準位

正エネルギーの電子が負エネルギーの状態に遷移するのを避けるために，Diracは，**真空**と呼ばれる状態は，すべての**負エネルギー**（$-\infty < E \leq -mc^2$）**の状態**が電子で完全に埋めつくされた状態であると仮定した．電子はPauliの排他律に従うから，1つの負エネルギー状態を2個以上の電子が占有することは許されない．したがって，すべての負エネルギー状態が電子によって占有されているならば，任意の正エネルギー電子が負エネルギー状態に落ちることは禁止される．このように真空を定義すれば，真空から負エネルギーの電子をと

り去ることができる．そうすると，負エネルギーの海に**空孔**ができる．いま，真空より運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E=-E_p$ の電子をとり去ったとすると，この状態は，真空よりエネルギーが $E_p$ だけ高く，運動量 $-\boldsymbol{p}$ をもち，電子とは逆符号の電荷 $(-(-e)=e>0)$ および逆方向のスピンをもった状態として観測されるはずである．さらに，エネルギーと運動量の関係，$E_p=\sqrt{(-\boldsymbol{p})^2c^2+m^2c^4}$，により，この空孔は電子と同じ質量 $m$ をもち，エネルギー $E_p$，運動量 $-\boldsymbol{p}$，電荷 $+e$ をもった正エネルギーの粒子として観測される．このように，Dirac 方程式の負エネルギーの解は，新しい粒子（**反粒子**）を記述していると解釈できる．

もし，真空がこのような解釈に従うものであれば，これに外場を掛けて，負エネルギーの電子をとり出すことができるはずである．とり出された電子が我々に観測されるためには，この電子が $E\geq mc^2$ のエネルギーをもたなければならない．すなわち，電子は運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E=-E_p(=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4})$ の状態から，運動量 $\boldsymbol{p}'$，エネルギー $E'=E_{p'}(=\sqrt{\boldsymbol{p}'^2c^2+m^2c^4})$ の状態に移らなければならない．このような遷移を起こさせるためには，外場からエネルギー $E_{p'}+E_p\geq 2mc^2$，運動量 $\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$ を与えればよい．この結果，エネルギー $E_{p'}$，運動量 $+\boldsymbol{p}'$，電荷 $-e$ の電子と，エネルギー $E_p$，運動量 $-\boldsymbol{p}$，電荷 $+e$ の反粒子が対になって真空から発生したと我々には観測されるはずである．これを対発生と呼ぶ．

このような解釈によって予言された電子の反粒子は，1932 年アンダーソン (Anderson) によって発見され，**陽電子**と名づけられた．また，負エネルギーの電子に与えられるエネルギーが $2mc^2$ より小さい場合にも，一般に電磁場の存在によって真空と呼ばれる状態の中の電子の分布が変化し，誘電体と同じように偏極が現れる．これは**真空偏極**と呼ばれ，水素原子の相対論的とり扱いの最後で述べたように，ラム・シフトとして現れる．

真空の定義からも明らかなように，Dirac の理論は多体問題である．1 体問題から出発したはずの理論が，負エネルギー解の解釈のために，多体問題になってしまった．それも，対発生があるから，粒子数が一定でない多体問題として考えなければならない．この問題を正しくとり扱うためには，Dirac 方程式の $\psi$ を，(3·27) が確率密度およびその流れを与える量子力学の状態ベクトル

と考えずに，量子化の手続きをして（第2量子化），場の演算子と考えることが必要である．

湯川によって予言されたパイ中間子はスピン0の粒子であるから，Klein-Gordon 方程式によって記述される．スピン0粒子の電荷を $e$ として，電荷密度と電流密度 $\rho^e, \boldsymbol{j}^e$ を考えてみる．これらは，(3·15) で与えられた確率密度と確率の流れに $e$ を掛けたものに等しい．

$$\rho^e=\frac{ie\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$
$$\boldsymbol{j}^e=-\frac{ie\hbar}{2m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*) \tag{4·53}$$

$\psi$ として平面波の解（粒子を一辺 $L$ の立方体に閉じこめる）

$$\psi=\frac{1}{L^{3/2}}e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)} \tag{4·54}$$

を用いると

$$\rho^e=\frac{e}{mc^2}\,\frac{1}{L^3}\,E$$
$$\boldsymbol{j}^e=\frac{e}{m}\,\frac{1}{L^3}\,\boldsymbol{p} \tag{4·55}$$

となる．正エネルギー $E$ をもつ反粒子（電荷 $-e$）に対しては

$$\rho^e=\frac{(-e)}{mc^2}\,\frac{1}{L^3}E=\frac{e}{mc^2}\,\frac{1}{L^3}(-E)$$
$$\boldsymbol{j}^e=\frac{(-e)}{m}\,\frac{1}{L^3}\boldsymbol{p}=\frac{e}{m}\,\frac{1}{L^3}(-\boldsymbol{p}) \tag{4·56}$$

のように書ける．これは，運動量 $-\boldsymbol{p}$，負のエネルギー $-E$ をもつ粒子の電荷密度および電流密度である．このことは，Dirac 粒子のみでなく，スピン0の粒子の場合にも，電荷 $e$ の粒子があれば，電荷 $-e$ の反粒子の存在の必要性を示している．しかし，反粒子の存在の証明や波動関数の解釈には，場の量子論が必要になる．

### B. 荷電共役理論

Dirac 方程式の負エネルギーの解は，真空の解釈を変更することにより，反粒子の運動を記述することがわかったが，今までのとり扱いでは，粒子と反粒子についてのとり扱いが極めて不平等である．そこで粒子と反粒子とを，最初

から対称にとり扱うことができるように理論を構成してみることにしよう．

粒子と反粒子とは電荷の符号が互いに異なるが，その他の性質は全く同じであるから，相互作用のない場合の反粒子（運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}$）の波動関数は

$$\psi'(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\,u^{(i)}(\boldsymbol{p})\exp\frac{i}{\hbar}[(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})-E_pt]\quad(i=1,2)\qquad(4\cdot57)$$

で与えられ，他方，その空孔である負エネルギーの粒子（運動量 $-\boldsymbol{p}$，エネルギー $-E_p$）の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\,v^{(i)}(\boldsymbol{p})\exp\frac{i}{\hbar}[-(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})+E_pt]\quad(i=1,2)\qquad(4\cdot58)$$

で与えられる．そこで $\psi'(\boldsymbol{r},t)$ と $\psi(\boldsymbol{r},t)$ との間に

$$\eta\psi'(\boldsymbol{r},t)=C\psi^*(\boldsymbol{r},t)\qquad(4\cdot59)$$

のような関係が存在するように見える．ここで $C$ は4行4列の行列，$\eta$ は位相因子で，$|\eta|^2=1$ である．このような $C$ を求めてみよう．(4・57)，(4・58) を (4・59) に代入すると

$$\eta u^{(i)}(\boldsymbol{p})=Cv^{(i)*}(\boldsymbol{p})\qquad(4\cdot60)$$

となる．$u^{(i)}(\boldsymbol{p})$，$v^{(i)}(\boldsymbol{p})$ は (3・76a)，(3・76b) より

$$(i\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu\gamma_\mu+mc)u^{(i)}(\boldsymbol{p})=0\qquad(4\cdot61)$$

$$(-i\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu\gamma_\mu+mc)v^{(i)}(\boldsymbol{p})=0\qquad(4\cdot62)$$

を満たす．(4・61) に (4・60) を代入すると

$$(i\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu\gamma_\mu+mc)Cv^{(i)*}(\boldsymbol{p})=0$$

となる．この式の複素共役をとり，左から $(C^*)^{-1}$ を作用させると

$$(-i\sum_{\mu=1}^{4}p_\mu{}^*(C^*)^{-1}\gamma_\mu{}^*C^*+mc)v^{(i)}(\boldsymbol{p})=0\qquad(4\cdot63)$$

となる．この方程式は (4・62) と同一でなければならないから

$$C^{-1}\gamma_\mu p_\mu C=\gamma_\mu{}^*p_\mu{}^*\qquad(\mu=1,2,3,4)\qquad(4\cdot64)$$

でなければならない．$p_\mu{}^*=p_\mu(\mu=1,2,3)$，$p_4{}^*=-p_4$ だから

$$C^{-1}\gamma_\mu C=\gamma_\mu{}^*\qquad(\mu=1,2,3)$$
$$=-\gamma_\mu{}^*\qquad(\mu=4)\qquad(4\cdot65)$$

一方，$\gamma_\mu$ 行列に対して (3·34) の表示を用いると

$$C^{-1}\gamma_\mu C=\gamma_\mu \qquad (\mu=2)$$
$$=-\gamma_\mu \qquad (\mu=1,3,4) \tag{4·66}$$

すなわち，$C$ は $\gamma_2$ と可換，かつ $\gamma_1$, $\gamma_3$, $\gamma_4$ と反可換だから

$$C=\gamma_2 \tag{4·67}$$

と選ぶことができる．こうすると，(4·60) の位相因子 $\eta$ は $\boldsymbol{u}^{(i)}$, $v^{(i)}$ の $\boldsymbol{i}$ に対して

$$\eta=\begin{cases}-1 & i=1\\ \ \ 1 & i=2\end{cases}$$

となる．また

$$C^2=1, \qquad \eta^2=1 \tag{4·68}$$

であるから，(4·59) より

$$\eta\psi(\boldsymbol{r},t)=C\psi'^*(\boldsymbol{r},t) \tag{4·69}$$

となる．この式を (4·59) とくらべると $\psi$ と $\psi'$ の役割が同じになっている．(4·69) を電磁場を含む Dirac 方程式 (4·4a) に代入し，(4·65) を用いると

$$\left(\sum_{k=1}^{3}\gamma_k^*\frac{\partial}{\partial x_k}-\gamma_4^*\frac{\partial}{\partial x_4}-\frac{ie}{\hbar c}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k^*A_k+\frac{ie}{\hbar c}\gamma_4^*A_4\right)\psi'^*+\frac{mc}{\hbar}\psi'^*=0$$

となる．この式の複素共役をとれば

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\psi'+\frac{mc}{\hbar}\psi'=0$$

となり，反粒子は粒子の電荷とは逆の符号の電荷をもつことが同時に満足されている．このような変換

$$\psi\longleftrightarrow\psi',\ \ e\longleftrightarrow -e$$

は**荷電共役変換**と呼ばれ，(4·59) または (4·69) の関係で結ばれる $\psi$ と $\psi'$ とは互いに荷電共役の関係にあるという．Dirac 方程式は荷電共役変換に対して不変である．すなわち，粒子を反粒子，反粒子を粒子と考えてもさつかえないことを示している．

# 5

# 場 の 量 子 論

## 5·1　輻射場の量子化

2章で述べた古典的電磁理論では，電磁場は時空的に振動する波動として記述されている．しかし，光電効果，コンプトン散乱を初めとし，微視的現象では電磁場が粒子性を示す現象が数多い．そこで電磁場を粒子的な描象で記述するに適した理論を紹介することにしよう．例として輻射場をとり上げ，量子化することを考えよう．**輻射場**は調和振動子の集団と同等であり，そのハミルトニアンは

$$W=\sum_{k}\sum_{\lambda}\frac{1}{2}\left[P_{k,\lambda}{}^{2}(t)+\omega_{k}{}^{2}Q_{k,\lambda}{}^{2}(t)\right] \tag{5·1}$$

である．これを量子化する手続きは，調和振動子の量子化に還元できる．すなわち，$P_{k,\lambda}$ と $Q_{k,\lambda}$ とを正準交換関係

$$\left.\begin{aligned}&[Q_{k,\lambda}, P_{k',\lambda'}]=i\hbar\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}\\&[Q_{k,\lambda}, Q_{k',\lambda'}]=0,\qquad [P_{k,\lambda}, P_{k',\lambda'}]=0\end{aligned}\right\} \tag{5·2}$$

を満たすエルミート演算子とみなせばよい．ここで，量子化された変数（演算子）を，量子化されない変数（$c$ 数）と全く同じ記号を用いるが，演算子（$q$ 数）は上記のような交換関係を満たすので，混乱は起こらない．その他の演算子についても，特に異なった活字を用いることをしないで，話を進めよう．さて，量子化されたハミルトニアンを表すには，今まで用いた上記の演算子 $P_{k,\lambda}$，$Q_{k,\lambda}$ を直接用いるよりも，これらの1次結合によって作られる新しい演算子

$$\left.\begin{aligned} a_{k,\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k Q_{k,\lambda} + iP_{k,\lambda}) \\ a_{k,\lambda}{}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k Q_{k,\lambda} - iP_{k,\lambda}) \end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot3)$$

を用いた方がいろいろと便利である．(5・3) は数係数を除いて，古典論の場合の (2・74) の逆変換に相当している．(2・74) より

$$\left.\begin{aligned} A_{k,\lambda} &= \frac{1}{2}\left[c\sqrt{4\pi}\,Q_{k,\lambda} - \frac{\sqrt{4\pi}}{ik}P_{k,\lambda}\right] \\ A_{k,\lambda}{}^{*} &= \frac{1}{2}\left[c\sqrt{4\pi}\,Q_{k,\lambda} + \frac{\sqrt{4\pi}}{ik}P_{k,\lambda}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot4)$$

である．$Q_{k,\lambda}, P_{k,\lambda}$ を量子化し，(5・3) の関係を用いると，(5・4) の第１式の右辺は $\sqrt{2\pi\hbar c^2/\omega_k}\,a_{k,\lambda}$ となるから，$\omega_k = kc$ を考慮すると，$A_{k,\lambda}$ と $a_{k,\lambda}$ との間には $A_{k,\lambda} \to \sqrt{2\pi\hbar c/k}\,a_{k,\lambda}$ の対応がある．

演算子 $a_{k,\lambda}$, $a_{k',\lambda'}{}^{\dagger}$ の交換関係は，(5・2)，(5・3) から容易に導かれる．

$$\begin{aligned} [a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}{}^{\dagger}] &= \frac{1}{2\hbar\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}[\omega_k Q_{k,\lambda} + iP_{k,\lambda},\ \omega_{k'}Q_{k',\lambda'} - iP_{k',\lambda'}] \\ &= -\frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}}[Q_{k,\lambda}, P_{k',\lambda'}] + \frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}}[P_{k,\lambda}, Q_{k',\lambda'}] \\ &= \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} \end{aligned} \qquad (5\cdot5)$$

$$\begin{aligned} [a_{k,\lambda},\ a_{k',\lambda'}] &= \frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}}[Q_{k,\lambda}, P_{k',\lambda'}] + \frac{i}{2\hbar}\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}}[P_{k,\lambda}, Q_{k',\lambda'}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$[a_{k,\lambda}{}^{\dagger}, a_{k',\lambda'}{}^{\dagger}] = 0$$

次に，$a_{k,\lambda}, a_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ から作られる演算子 $N_{k,\lambda}, N$ を導入する．

$$N = \sum_{k,\lambda} N_{k,\lambda} \qquad (5\cdot6)$$

$$N_{k,\lambda} = a_{k,\lambda}{}^{\dagger} a_{k,\lambda} \qquad (5\cdot7)$$

$N, N_{k,\lambda}$ がエルミート演算子であることは，定義より明らかである．これに反し $a_{k,\lambda}$, $a_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ はエルミート演算子ではない．$N_{k,\lambda}$ と $a_{k,\lambda}$ との交換関係は(5・5) を利用して容易に計算することができる．すなわち

$$\begin{aligned} [a_{k,\lambda}, N_{k',\lambda'}] &= [a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}{}^{\dagger}]a_{k',\lambda'} + a_{k',\lambda'}{}^{\dagger}[a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}] \\ &= \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}a_{k,\lambda} \end{aligned} \qquad (5\cdot8)$$

となる．同様にして

$$[a_{k,\lambda}{}^{\dagger}, N_{k',\lambda'}] = -\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}a_{k,\lambda}{}^{\dagger} \tag{5·9}$$

となる．演算子 $N_{k,\lambda}$ の固有値を $n_{k,\lambda}$ とし，そのときの規格化された固有ベクトルを $|n_{k,\lambda}\rangle$ とすると

$$N_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle = n_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle \tag{5·10}$$

ここで，$N_{k,\lambda}$ はエルミート演算子であるから，$n_{k,\lambda}$ は実数でなければならない．(5·8)，(5·9) の交換関係と (5·10) から

$$\begin{aligned} N_{k,\lambda}a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle &= (a_{k,\lambda}N_{k,\lambda} - a_{k,\lambda})|n_{k,\lambda}\rangle \\ &= n_{k,\lambda}a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle - a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle \\ &= (n_{k,\lambda}-1)a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle \end{aligned} \tag{5·11}$$

$$N_{k,\lambda}a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|n_{k,\lambda}\rangle = (n_{k,\lambda}+1)a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|n_{k,\lambda}\rangle \tag{5·12}$$

が得られる．(5·11)，(5·12) から明らかなように，$a_{k,\lambda}$ は演算子 $N_{k,\lambda}$ の固有値 $n_{k,\lambda}$ を 1 だけ減らし，逆に，$a_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ は $n_{k,\lambda}$ を 1 つ増やす演算子である．そこで

$$\left.\begin{aligned} a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle &= C_{-}|n_{k,\lambda}-1\rangle \\ a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|n_{k,\lambda}\rangle &= C_{+}|n_{k,\lambda}+1\rangle \end{aligned}\right\} \tag{5·13}$$

と書くことができる．$C_{\pm}$ は単なる数係数で，(5·13) の絶対値の 2 乗をとることによって決められる．

$$\begin{aligned} |C_{-}|^2 &= |C_{-}|^2\langle n_{k,\lambda}-1|n_{k,\lambda}-1\rangle \\ &= \langle n_{k,\lambda}|a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle = n_{k,\lambda} \end{aligned} \tag{5·14}$$

$$\begin{aligned} |C_{+}|^2 &= |C_{+}|^2\langle n_{k,\lambda}+1|n_{k,\lambda}+1\rangle \\ &= \langle n_{k,\lambda}|a_{k,\lambda}a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|n_{k,\lambda}\rangle \\ &= \langle n_{k,\lambda}|a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}+1|n_{k,\lambda}\rangle = n_{k,\lambda}+1 \end{aligned} \tag{5·15}$$

(5·14) より $n_{k,\lambda} \geq 0$ でなければならないから，固有ベクトルの位相を適当に選べば，(5·13)～(5·15) から

$$a_{k,\lambda}|n_{k,\lambda}\rangle = \sqrt{n_{k,\lambda}}\,|n_{k,\lambda}-1\rangle \tag{5·16}$$

$$a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|n_{k,\lambda}\rangle = \sqrt{n_{k,\lambda}+1}\,|n_{k,\lambda}+1\rangle \tag{5·17}$$

となる． ここで，$n_{k,\lambda}$ は 0 または正の整数であることを示そう．もし $n_{k,\lambda}$ に整数でないものがあるとすると，$a_{k,\lambda}$ を繰返し掛けることによって，(5·11) から負の固有値をもつ状態を作ることができる．これは $n_{k,\lambda} \geq 0$ という条件 (5·14) と矛盾する．それゆえ，$n_{k,\lambda}$ は 0 または正の整数でなければならない．と

ころで，$n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ は量子数 $(\boldsymbol{k},\lambda)$ で規定された状態にある**粒子数**を表すと考えられる（付録D，粒子数表現のD・2を参照）．すなわち，$N_{\boldsymbol{k},\lambda}$ は $(\boldsymbol{k},\lambda)$ で規定された状態にある粒子数を与える**個数演算子**，$N$ は全粒子数を与える演算子 (number operator) である．また $a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger$ はそれぞれ $(\boldsymbol{k},\lambda)$ で規定された粒子の**消滅演算子** (annihilation operator)，**生成演算子** (creation operator) である．この場合の粒子は，輻射場の量子であり，**光量子**あるいは**光子** (photon) という．

次に，光子の状態ベクトルについて簡単にふれておく．真空とは，光子が1個も存在しない状態であるから，すべての $(\boldsymbol{k},\lambda)$ の値に対して $n_{\boldsymbol{k},\lambda}=0$ である．したがって，(5・10) の状態ベクトルを用いると，**真空状態** $|0\rangle$ は

$$|0\rangle=|0_{\boldsymbol{k}_1,\lambda_1}\rangle|0_{\boldsymbol{k}_2,\lambda_2}\rangle\cdots$$
$$=\prod_{\boldsymbol{k}}\prod_{\lambda}|0_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle \tag{5・18}$$

と表される．(5・16) と (5・18) とから

$$a_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle=0 \tag{5・19}$$

となる．真空状態に全個数演算子 (5・6) を作用させると，(5・19) より

$$N|0\rangle=\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger a_{\boldsymbol{k},\lambda}|0\rangle=0 \tag{5・20}$$

となるが，これは当然なことである．一般に，どんな状態も真空に生成演算子を作用させることによって得られる．たとえば，$(\boldsymbol{k},\lambda)$ の光子が1個存在する状態は

$$a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger|0\rangle$$

で与えられる．さらに一般的な状態，$(\boldsymbol{k}_1,\lambda_1)$ の光子が $n_{\boldsymbol{k}_1,\lambda_1}$ 個，$(\boldsymbol{k}_2,\lambda_2)$ の光子が $n_{\boldsymbol{k}_2,\lambda_2}$ 個…存在する状態，を表す規格化された状態ベクトルは (5・17) を繰返し用いることによって

$$|\{n_{\boldsymbol{k},\lambda}\}\rangle=|n_{\boldsymbol{k}_1,\lambda_1}\rangle|n_{\boldsymbol{k}_2,\lambda_2}\rangle\cdots|n_{\boldsymbol{k}_l,\lambda_l}\rangle\cdots$$
$$=\prod_{\boldsymbol{k}}\prod_{\lambda}(n_{\boldsymbol{k},\lambda}!)^{-1/2}(a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger)^{n_{\boldsymbol{k},\lambda}}|0\rangle \tag{5・21}$$

と表すことができる．$(n_{\boldsymbol{k},\lambda}!)^{-1/2}$ は (5・21) が規格化されるための係数である．規格化が正しく行なわれていることは次のようにしてわかる．(5・17) を $n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ 回繰返し用いると

$$(a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger)^{n_{\boldsymbol{k},\lambda}}|0\rangle=(a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger)^{n_{\boldsymbol{k},\lambda}-1}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger|0\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_{k,\lambda}{}^{\dagger})^{n_{k,\lambda}-1}\sqrt{1}\,|1_{k,\lambda}\rangle \\
&= (a_{k,\lambda}{}^{\dagger})^{n_{k,\lambda}-2}\sqrt{1\cdot 2}\,|2_{k,\lambda}\rangle \\
&= \cdots \\
&= (a_{k,\lambda}{}^{\dagger})^{n_{k,\lambda}-l}\sqrt{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot l}\,|l_{k,\lambda}\rangle \\
&= \cdots \\
&= \sqrt{n_{k,\lambda}!}\,|n_{k,\lambda}\rangle
\end{aligned}
\tag{5·22}
$$

ここで $1_{k,\lambda}$, $2_{k,\lambda}$, … は量子数 $(k,\lambda)$ で指定された光子がそれぞれ 1 個，2 個，… 存在することを表す．(5·22) より，規格化定数は $(n_{k,\lambda}!)^{-1/2}$ となって，$|\{n_{k,\lambda}\}\rangle$ は

$$
\langle\{n_{k,\lambda}\}|\{n_{k,\lambda}\}\rangle = 1 \tag{5·23}
$$

を満たしていることがわかる．また，(5·21) の状態に (5·6) と (5·7) の個数演算子を作用させると

$$
\begin{aligned}
N_{k,\lambda}|\{n_{k,\lambda}\}\rangle &= n_{k,\lambda}|\{n_{k,\lambda}\}\rangle \\
N|\{n_{k,\lambda}\}\rangle &= \sum_{k}\sum_{\lambda} N_{k,\lambda}|\{n_{k,\lambda}\}\rangle \\
&= \left(\sum_{k}\sum_{\lambda} n_{k,\lambda}\right)|\{n_{k,\lambda}\}\rangle
\end{aligned}
\tag{5·24}
$$

が得られる．

最後に，輻射場のエネルギーと運動量を演算子 $a_{k,\lambda}$, $a_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ で表しておこう．(2·75)，(2·76) において，正準変数 $Q_{k,\lambda}$, $P_{k,\lambda}$ を (5·2) の量子化された演算子でおきかえるならば，量子化された輻射場の全エネルギーと全運動量が得られる．量子化された全エネルギー演算子という意味で，(2·75) で用いられた $W$ の代わりに，$H$ を用いることにすると

$$
H = \frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{\lambda}(P_{k,\lambda}{}^{2} + \omega_k{}^{2}Q_{k,\lambda}{}^{2})
$$

である．(5·3) より

$$
\begin{aligned}
a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda} &= \frac{1}{2\hbar\omega_k}(\omega_k Q_{k,\lambda} - iP_{k,\lambda})(\omega_k Q_{k,\lambda} + iP_{k,\lambda}) \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega_k}\{\omega_k{}^{2}Q_{k,\lambda}{}^{2} + P_{k,\lambda}{}^{2} + i\omega_k[Q_{k,\lambda}, P_{k,\lambda}]\} \\
&= \frac{1}{2\hbar\omega_k}(P_{k,\lambda}{}^{2} + \omega_k{}^{2}Q_{k,\lambda}{}^{2}) - \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{5·25}
$$

となるから

$$H=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\omega_k\left(a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\omega_k\left(N_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right) \tag{5·26}$$

と表される．(5·26) の第2項を**零点エネルギー**という．これは無限大の定数であるが，ある状態のエネルギーは，基準にとった状態のエネルギーとの差として表されるから，真空のエネルギーが零，すなわち

$$H|0\rangle=0$$

となるようにエネルギーの基準を選ぶならば，零点エネルギーを落とすことができる．(5·19) から $H$ は

$$H=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\omega_k a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\omega_k N_{k,\lambda} \tag{5·27}$$

と書くことができる．これを一般の状態ベクトル $|\{n_{k,\lambda}\}\rangle$ に作用させると，(5·24) を用いて

$$\begin{aligned}H|\{n_{k,\lambda}\}\rangle&=(\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\omega_k N_{k,\lambda})|\{n_{k,\lambda}\}\rangle\\&=(\sum_{k}\sum_{\lambda}n_{k,\lambda}\hbar\omega_k)|\{n_{k,\lambda}\}\rangle\end{aligned} \tag{5·28}$$

となり，エネルギー固有値は $\sum_{k}\sum_{\lambda}n_{k,\lambda}\hbar\omega_k$ で与えられることがわかる．

今度は，全運動量を $a_{k,\lambda}, a_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ で表してみよう．この場合も，量子化された全運動量演算子を (2·76) で用いられた $\boldsymbol{G}$ の代わりに $\boldsymbol{P}$ で表すならば，$H$ のときと同様にして

$$P_{k,\lambda}{}^2+\omega_k{}^2Q_{k,\lambda}{}^2=2\hbar\omega_k\left(a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)$$

これを (2·76) に代入して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\boldsymbol{k}\left(a_{k,\lambda}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)\\&=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\boldsymbol{k}\left(N_{k,\lambda}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned} \tag{5.29}$$

となる．上式の第2項は $\boldsymbol{k}$ についての奇関数であるから，$-\boldsymbol{k}$ についての和と $\boldsymbol{k}$ についての和が相殺して零となる．したがって

$$\boldsymbol{P}=\sum_{k}\sum_{\lambda}\hbar\boldsymbol{k}N_{k,\lambda} \tag{5·30}$$

と表される．(5·30) と (5·24) から

$$\boldsymbol{P}|\{n_{k,\lambda}\}\rangle=(\sum_{k}\sum_{\lambda}n_{k,\lambda}\hbar\boldsymbol{k})|\{n_{k,\lambda}\}\rangle \tag{5·31}$$

が得られ，$\sum_{k}\sum_{\lambda}n_{k,\lambda}\hbar\boldsymbol{k}$ が全運動量 $\boldsymbol{P}$ の固有値となる．特に，$(\boldsymbol{k}, \lambda)$ で規定

される1光子状態に対して (5・28) と (5・31) を書くと，(5・9) より

$$Ha_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle=(\sum_{k'}\sum_{\lambda'}\hbar\omega_{k'}N_{\boldsymbol{k}',\lambda'})a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle$$

$$=\hbar\omega_k a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle \qquad (5\cdot32)$$

$$\boldsymbol{P}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle=\hbar\boldsymbol{k}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle \qquad (5\cdot33)$$

となる．(5・32)，(5・33) は，$(\boldsymbol{k},\lambda)$ で規定された1個の光子は，$\hbar\omega_k$ のエネルギーと $\hbar\boldsymbol{k}$ の運動量をもっていることを示している．これは，光電効果と関連して Einstein が提唱した光量子そのものである．また，(5・28)，(5・31) より，$|n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle$ で表された状態は，エネルギー $\hbar\omega_k n_{\boldsymbol{k},\lambda}$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ をもつ．これは，エネルギー $\hbar\omega_k$，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の光子が $n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ 個存在する状態を表している．したがって，$n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ は $(\boldsymbol{k},\lambda)$ で指定された光子の数を表すと考えたことは正しかったことがわかる．さらに，輻射場の状態を規定するのに，$n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ という無限個の負でない整数の組を用いて $|\{n_{\boldsymbol{k},\lambda}\}\rangle$ と表したが，これは各 $(\boldsymbol{k},\lambda)$ の状態の光子の数をすべて指定することによって，輻射場の状態は規定されるということにほかならない．

粒子のエネルギー $E$，運動量 $\boldsymbol{p}$，質量 $m$ の間の関係式

$$E^2=m^2c^4+c^2\boldsymbol{p}^2$$

および

$$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k},\quad E=\hbar\omega_k=\hbar c|\boldsymbol{k}|$$

を用いると，$m=0$ となって，光の質量は零であり，したがって常に光速度で進む．光は電磁波であり，電磁場の量子が光子なのだから，これは当然のことである．

さて正準変数 $Q_{\boldsymbol{k},\lambda}$，$P_{\boldsymbol{k},\lambda}$ が量子化された演算子であるから，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ も当然演算子となる．(2・69)，(2・74)，(5・3) を用いると，量子化された輻射場は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k}\sum_{\lambda=1,2}\sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{(\lambda)}[a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \qquad (5\cdot34)$$

と書かれる．ここでは (2・69) との対応をはっきりさせるために，演算子の時間的依存性を明示した．**Schrödinger** 表示と **Heisenberg** 表示の違いは，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ などが時間の関数になっていないか，それともなっているかということだけである．Heisenberg 表示での演算子 $\psi$ に対する運動方程式は

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dt}=[H,\psi] \tag{5·35}$$

で，演算子の時間的推移はすべて上式によって与えられる．したがって，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)$ の時間変化は (5·27) のハミルトニアンを用いると

$$\begin{aligned}\dot{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)&=\frac{i}{\hbar}[H,a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)]\\&=\frac{i}{\hbar}\sum_{k'}\sum_{\lambda'}\hbar\omega_{k'}[a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}',\lambda'},a_{\boldsymbol{k},\lambda}]\\&=i\sum_{k'}\sum_{\lambda'}\omega_{k'}\{a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}[a_{\boldsymbol{k}',\lambda'},a_{\boldsymbol{k},\lambda}]+[a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger},a_{\boldsymbol{k},\lambda}]a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\}\\&=i\sum_{k'}\sum_{\lambda'}\omega_{k'}(-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'})a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\\&=-i\omega_k a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)\end{aligned} \tag{5·36}$$

と表すことができる．2 階微分は (5·36) から

$$\ddot{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=\frac{i}{\hbar}[H,\ \dot{a}_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)]=\frac{1}{\hbar}\omega_k[H,a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)]=-\omega_k{}^2a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t) \tag{5·37}$$

となり，この式は古典論の (2·68) に対応する．(5·37) を用いると，量子化された輻射場の方程式は，古典論の場合と同じ Maxwell の方程式

$$\Box A(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{5·38}$$

となることが容易に導かれる．実際

$$\Delta A(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k}\sum_{\lambda}k^2\sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{(\lambda)}[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k}\sum_{\lambda}\left(-\frac{\omega_k{}^2}{c^2}\right)\sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{(\lambda)}[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]$$

ここに $\omega=kc$ である．したがって

$$\Box A=\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A=0$$

となる．ただ，$\boldsymbol{A}$ は古典論の場合には実数の量であったが，ここではエルミート演算子である．(5·36) の解は

$$a_{\boldsymbol{k},\lambda}(t)=a_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)e^{-i\omega_k t} \tag{5·39}$$

で与えられるから，(5·34) の輻射場は

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{k}\sum_{\lambda=1,2}\sqrt{\frac{hc^2}{\omega_k}}\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{(\lambda)}[&a_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega_k t}\\&+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}(0)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\omega_k t}]\end{aligned} \tag{5·40}$$

と書き表される.

(*5·39*) は Schrödinger 表示と Heisenberg 表示とを $t=0$ で一致させた場合の，2つの表示における演算子の間の関係を表している．すなわち，$a_{k,\lambda}(t)$ が Heisenberg 表示の演算子で，$a_{k,\lambda}(0)$ は Schrödinger 表示での演算子であると考えてよい．$\boldsymbol{A}$ の Schrödinger 表示は，(*5·40*) で $t=0$ とおいたものに相当する.

## 5·2 Dirac 場の量子化

### A. 相互作用がない場合

前節では輻射場を量子化したので，今度は Dirac 方程式に従う**粒子の波動場** (**Dirac 場**という) を量子化することを考えよう.

輻射場の場合には，ベクトル・ポテンシャルをフーリエ級数に展開し，その展開係数 $\boldsymbol{A}_{k,\lambda}$, $\boldsymbol{A}_{k,\lambda}{}^{\dagger}$ から作られる正準変数を，交換関係を満足するエルミート演算子とみなすことによって，量子化を行なった．この結果，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ は，空間内のある点 $\boldsymbol{r}$，時刻 $t$ で指定された輻射場の演算子となったのである.

Dirac 場の場合にも，輻射場のときの正準変数 $P, Q$ に相当するものを見つけて，これらに適当な交換関係を仮定して演算子とみなすことで，量子化を行なうことができる．そこで，正準変数を見出すことをまず考えよう.

力学系では，一般化された座標 $q_i(i=1, 2, \cdots, f, f$ は系の自由度) とその時間微分 $\dot{q}_i$ の関数であるラグランジアン $L$ から，変分原理によって運動方程式が導かれる．場を一般化された力学系と見て，ラグランジアンの存在を仮定する．$\psi$ と $\psi^{\dagger}$ を一般化座標とみなした場合の力学系のとり扱いについては，たとえば湯川秀樹，豊田利幸編，岩波講座現代物理学の基礎［第2版］3巻，10章に紹介されているが，ここでは我々の議論に必要な論理の記述を行なう．さてラグランジアンが存在し下記の形をとるとしよう.

$$L=\int \mathscr{L}\left(\psi, \psi^{\dagger}, \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}}, \frac{\partial \psi^{\dagger}}{\partial x_{\mu}}\right) d\boldsymbol{r} \qquad (\mu=1,2,3,4)$$

このとき $\mathscr{L}$ をラグランジアン密度という．変分原理から導かれるオイラー (Euler) の方程式は，$\psi_{\sigma}$ を変化させたとき

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{\sigma}}-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial t}\right)}-\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{k}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \psi_{\sigma}}{\partial x_{k}}\right)}=0 \qquad (5 \cdot 41)$$

ただし，$\psi_\sigma$ は $\psi$ の成分である．(5·41) が Dirac 方程式を与えるような $\mathscr{L}$ としては

$$\mathscr{L}=-\hbar c\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-mc^2\bar{\psi}\psi$$

$$=\hbar\bar{\psi}\left(i\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial t}-c\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)-mc^2\bar{\psi}\psi \tag{5·42}$$

ととればよい．(5·42) より

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}\right)}=i\hbar\psi_\sigma{}^*,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_\sigma}{\partial x_k}\right)}=-\hbar c\sum_{\rho=1}^{4}\psi_\rho{}^*(\gamma_4\gamma_k)_{\rho\sigma}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_\sigma}=-mc^2\sum_{\rho=1}^{4}\psi_\rho{}^*(\gamma_4)_{\rho\sigma}$$

であるから，(5·41) は

$$-mc^2\sum_{\rho=1}^{4}\psi_\rho{}^*(\gamma_4)_{\rho\sigma}-i\hbar\frac{\partial\psi_\sigma{}^*}{\partial t}+\hbar c\sum_{k=1}^{3}\sum_{\rho=1}^{4}\frac{\partial\psi_\rho{}^*}{\partial x_k}(\gamma_4\gamma_k)_{\rho\sigma}=0$$

となる．上式の第 2 項は

$$-i\hbar\frac{\partial\psi_\sigma{}^*}{\partial t}=\hbar c\sum_{\rho=1}^{4}\frac{\partial\psi_\rho{}^*}{\partial x_4}(\gamma_4\cdot\gamma_4)_{\rho\sigma}$$

と変形されるから，結局，(5·41) は

$$-mc^2\sum_{\rho=1}^{4}\psi_\rho{}^*(\gamma_4)_{\rho\sigma}+\hbar c\sum_{\rho=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\psi_\rho{}^*}{\partial x_\mu}(\gamma_4\gamma_\mu)_{\rho\sigma}=0$$

となる．$\sum_\rho\psi_\rho{}^*(\gamma_4)_{\rho\sigma}$ は $\bar{\psi}$ の $\sigma$ 成分であり，$\sum_\rho(\partial\psi_\rho{}^*/\partial x_\mu)(\gamma_4\gamma_\mu)_{\rho\sigma}$ は $(\partial\bar{\psi}/\partial x_\mu)\gamma_\mu$ の $\sigma$ 成分であるから，上式の両辺を $\hbar c$ で割って

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\mu-\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}=0 \tag{5·43}$$

が得られる．これは (5·25 b) で与えられた Dirac 方程式である．

さて，$\psi_\sigma$ に**正準共役な量**は

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}\right)}=i\hbar\psi_\sigma{}^* \tag{5·44}$$

である．いまハミルトニアン密度 $\mathscr{H}$ を ($H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L$ を想起して)

$$\mathscr{H}=\sum_{\sigma=1}^{4}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}\right)}\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}-\mathscr{L}$$

と定義すると

$$\mathcal{H}=\sum_{\sigma=1}^{4} i\hbar\psi_\sigma{}^*\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial t}-\hbar\bar{\psi}\left(i\gamma_4\frac{\partial\psi}{\partial t}-c\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)+mc^2\bar{\psi}\psi$$
$$=\hbar c\bar{\psi}\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}+mc^2\bar{\psi}\psi$$
$$=\hbar c\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+mc^2\bar{\psi}\psi \tag{5・45}$$

と与えられる．そこで，ハミルトニアン $H$ は

$$H=\int\bar{\psi}(\hbar c\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2)\psi d\boldsymbol{r}$$
$$=\int\psi^\dagger(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2\beta)\psi d\boldsymbol{r} \tag{5・46}$$

となる．ここで，$\psi$, $\psi^\dagger$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{t}$ の関数である．これを量子化する手続きを次に述べよう．

Schrödinger 表示では，粒子の状態は Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle=H|\Psi\rangle \tag{5・47}$$

によって与えられる状態ベクトル $|\Psi\rangle$ によって記述される．今までは，状態ベクトルとして $\psi$ を用いてきたが，すぐ後で，$\psi$ と $\psi^\dagger$ を演算子とみなして，交換関係を設定する．そこで，状態ベクトルと演算子とを区別するために，状態ベクトルとして $|\Psi\rangle$ を用いることにする．したがって，(5・47) は (3・17) と同じものである．演算子 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ は Dirac 方程式

$$\left(\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{5・48}$$

の解である．Schrödinger 表示では，演算子は時間に依存しないから，(5・48) の $t=0$ の解をとって，これを $\psi(\boldsymbol{r})$ と書くことにする．

(5・44) より，正準共役な量として，$\psi_\sigma$, $i\hbar\psi_\sigma{}^*$ をとることができるから，これらを演算子とみなして，交換関係としてどのようなものが適当であるかを次に考えてみよう．まず考えられるのは輻射場の場合と似た関係であるが，これではフェルミ粒子の性質と矛盾した結果が生まれる（たとえば，粒子数演算子の固有値が 0，1 だけではなくなる，((5・56) 参照))．そこで，**反交換関係**を次のように設定する．

$$\psi_\rho(\boldsymbol{r})\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')+\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')\psi_\rho(\boldsymbol{r})=\delta_{\rho,\sigma}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$
$$\psi_\rho(\boldsymbol{r})\psi_\sigma(\boldsymbol{r}')+\psi_\sigma(\boldsymbol{r}')\psi_\rho(\boldsymbol{r})=0 \tag{5・49}$$
$$\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r})\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')+\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r})=0$$

ここで，$\psi_\rho$, $\psi_\sigma{}^*$ は演算子 $\psi$, $\psi^\dagger$ の各成分である．また $\boldsymbol{r}$ は連続的な変数であるから，$\delta$ 関数 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ が現れる．

粒子を一辺 $L$ の立方体に閉じこめるという境界条件をおくと，(3・86) により

$$\psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{s=1}^{2}\left[c_{\boldsymbol{p},s}u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right] \quad (5\cdot50)$$

となる．ただし，$\psi(\boldsymbol{r})$ が演算子であるから，$c_{\boldsymbol{p},s}$, $d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger$ は当然演算子となる．

$u^{(s)}(\boldsymbol{p})$, $v^{(s)}(\boldsymbol{p})$ は §3・5 で導入されたスピノルで，これらの性質は (3・73′) によって次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
&u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})u^{(r)}(\boldsymbol{p})=\delta_{s,r}\frac{E_p}{mc^2}\\
&v^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})v^{(r)}(\boldsymbol{p})=\delta_{s,r}\frac{E_p}{mc^2} \qquad (5\cdot51)\\
&u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})v^{(r)}(-\boldsymbol{p})=v^{(s)\dagger}(-\boldsymbol{p})u^{(r)}(\boldsymbol{p})=0 \qquad (r,s=1,2)
\end{aligned}$$

これを用いて (5・50) をフーリエ変換すると

$$\begin{aligned}
c_{\boldsymbol{p},s}&=\frac{1}{L^{3/2}}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}\\
c_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger&=(c_{\boldsymbol{p},s})^\dagger=\frac{1}{L^{3/2}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\psi^\dagger(\boldsymbol{r})u^{(s)}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{r}\\
d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger&=\frac{1}{L^{3/2}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}v^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (5\cdot52)\\
d_{\boldsymbol{p},s}&=(d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger)^\dagger=\frac{1}{L^{3/2}}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\psi^\dagger(\boldsymbol{r})v^{(s)}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

となる．ここで演算子 $c_{\boldsymbol{p},s}$, $c_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger$, $d_{\boldsymbol{p},s}$ および $d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger$ の間の反交換関係を調べてみよう．(5・52) により

$$\begin{aligned}
&c_{\boldsymbol{p},s}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^\dagger+c_{\boldsymbol{p}',r}{}^\dagger c_{\boldsymbol{p},s}\\
&=\frac{1}{L^3}\frac{mc^2}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}')}u_\rho{}^{(s)*}(\boldsymbol{p})u_\sigma{}^{(r)}(\boldsymbol{p}')\\
&\times[\psi_\rho(\boldsymbol{r})\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')+\psi_\sigma{}^*(\boldsymbol{r}')\psi_\rho(\boldsymbol{r})]
\end{aligned}$$

(5・49) より

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{L^3}\frac{mc^2}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}')}u_\rho{}^{(s)*}(\boldsymbol{p})u_\sigma{}^{(r)}(\boldsymbol{p}')\\
&\times\delta_{\rho,\sigma}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{L^3}\frac{mc^2}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d\boldsymbol{r}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{r}}u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})u^{(r)}(\boldsymbol{p}')$$

$$=\frac{mc^2}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\delta_{p,p'}u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})u^{(r)}(\boldsymbol{p}')=\delta_{r,s}\delta_{p,p'}$$

したがって

$$c_{p,s}c_{p',r}^{\dagger}+c_{p',r}^{\dagger}c_{p,s}=\delta_{r,s}\delta_{p,p'} \tag{5・53 a}$$

となる．同様にして

$$d_{p,s}d_{p',r}^{\dagger}+d_{p',r}^{\dagger}d_{p,s}=\delta_{r,s}\delta_{p,p'} \tag{5・53 b}$$

$$c_{p,s}c_{p',r}+c_{p',r}c_{p,s}=c_{p,s}^{\dagger}c_{p',r}^{\dagger}+c_{p',r}^{\dagger}c_{p,s}^{\dagger}=0 \tag{5・53 c}$$

$$d_{p,s}d_{p',r}+d_{p',r}d_{p,s}=d_{p,s}^{\dagger}d_{p',r}^{\dagger}+d_{p',r}^{\dagger}d_{p,s}^{\dagger}=0 \tag{5・53 d}$$

$$c_{p,s}d_{p',r}+d_{p',r}c_{p,s}=c_{p,s}^{\dagger}d_{p',r}^{\dagger}+d_{p',r}^{\dagger}c_{p,s}^{\dagger}=0 \tag{5・53 e}$$

$$c_{p,s}^{\dagger}d_{p',r}+d_{p',r}c_{p,s}^{\dagger}=c_{p,s}d_{p',r}^{\dagger}+d_{p',r}^{\dagger}c_{p,s}=0 \tag{5・53 f}$$

が証明できる．

(5・46) へ (5・50) を代入し，(5・53) の反交換関係を用いると，ハミルトニアンは

$$H=\sum_p[E_p(c_{p,1}^{\dagger}c_{p,1}+c_{p,2}^{\dagger}c_{p,2})-E_p(d_{p,1}d_{p,1}^{\dagger}+d_{p,2}d_{p,2}^{\dagger})] \tag{5・54}$$

で与えられる．後で証明されるが，$c_{p,s}^{\dagger}$，$c_{p,s}$ $(s=1,2)$ はスピン $s$，運動量 $\boldsymbol{p}$ の正エネルギー粒子を生成，消滅する演算子と考えることができる，(付録D，粒子数表現，D・2 の b 参照のこと)．粒子の個数演算子を輻射場の場合にならって

$$n_{p,s}^{(+)}=c_{p,s}^{\dagger}c_{p,s} \qquad (s=1,2) \tag{5・55}$$

と定義すれば

$$\begin{aligned}(n_{p,s}^{(+)})^2&=(c_{p,s}^{\dagger}c_{p,s})(c_{p,s}^{\dagger}c_{p,s})\\&=c_{p,s}^{\dagger}(1-c_{p,s}^{\dagger}c_{p,s})c_{p,s}\\&=c_{p,s}^{\dagger}c_{p,s}=n_{p,s}^{(+)}\end{aligned} \tag{5・56}$$

であるから，$n_{p,s}^{(+)}$ の固有値は 0 および 1 のみが可能で，1 つの状態に 1 つの粒子しか存在し得ないというパウリの排他律と一致する．したがって，(5・54) の右辺の第 1 および第 2 項はそれぞれのスピン状態の正エネルギー粒子のもつ全エネルギーを表している．同様に，$d_{p,s}$，$d_{p,s}^{\dagger}$ $(s=1,2)$ をスピン $s'(s'=3-s)$，運動量 $-\boldsymbol{p}$ の負のエネルギー粒子を生成，消滅する演算子と考えれば，

$d_{p,s}d_{p,s}^{\dagger}$ は負エネルギー粒子の個数演算子となっていて，その個有値もまた 0 および 1 である．したがって (5・54) の右辺の第 3 および第 4 項は，それぞれのスピン状態の負エネルギー粒子の全エネルギーを表している．しかし演算子 $d_{p,s}$, $d_{p,s}^{\dagger}$ はまた，上とは逆にスピン $s$, 運動量 $\boldsymbol{p}$ の正エネルギーの反粒子を消滅，生成する演算子とも考えることができる．このように考えると (5・50) で表された $\psi(\boldsymbol{r})$ は粒子の消滅演算子であると同時に，反粒子の生成演算子でもある．そうすると

$$n_{p,s}^{(-)}=d_{p,s}^{\dagger}d_{p,s} \qquad (5\cdot57)$$

はこの反粒子の個数演算子である．このようにすると，パウリの排他律は満たされることがわかったが，しかしハミルトニアン (5・54) は正値ではない．$d_{p,r}$, $d_{p,r}^{\dagger}$ の反交換関係により (5・54) は

$$H=\sum_p\left[E_p(n_{p,1}^{(+)}+n_{p,2}^{(+)})+E_p(n_{p,1}^{(-)}+n_{p,2}^{(-)})\right]-2\sum_p E_p \qquad (5\cdot58)$$

と書き直すことができる．上式の個数演算子を含む項は §4・4 で述べた粒子と反粒子のもつ全エネルギーに，演算子を含まない項は負の無限大のエネルギーになっている．Dirac の空孔理論によれば，真空とは負のエネルギー状態がパウリの排他律にしたがってすべて粒子によって占められている状態であるから，この負の無限大のエネルギーは真空のエネルギーである．(5・58) が Dirac の空孔理論の数学的表現である．我々はエネルギーを常に真空を基準にして測定しているから，実際に観測されるのは演算子を含む項だけである．そこで (5・58) より $(-2\sum_p E_p)$ のエネルギーを省いて

$$H=\sum_p\left[E_p(n_{p,1}^{(+)}+n_{p,2}^{(+)})+E_p(n_{p,1}^{(-)}+n_{p,2}^{(-)})\right] \qquad (5\cdot59)$$

と書くことができる．(5・59) で与えられたハミルトニアンは，もはや負の値をとることはない．

このように，ある物理量を量子化すると，演算子を含まない無限大の量が現れるが，これらはすべて真空の中の負エネルギー粒子によるものであり，基準を真空にとることにより，これらの発散量をとり去ることができる．ある物理量 $F$ に対して $\psi^{\dagger}F\psi$ を評価する際，$\psi^{\dagger}$ や $\psi$ に現れる消滅演算子をすべての生成演算子の右側に並べかえる．この並べかえにおいては，これらの演算子はすべて反可換 ($ab=-ba$；$a, b$ は演算子) としておく．このような操作を ***S* 積**を作るという．

なお，物理量 $F$ に対して

$$\psi^\dagger F\psi \longrightarrow \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}(\psi_\rho{}^* F_{\rho\sigma}\psi_\sigma - \psi_\sigma F_{\rho\sigma}\psi_\rho{}^*) \equiv \frac{1}{2}[\psi^\dagger, F\psi] \qquad (5\cdot 60)$$

とおきかえておけば，粒子と反粒子とは全く対称な形式で記述される．このような操作を **Heisenberg の対称化**という．この操作は，7章でコンプトン (Compton) 散乱のハミルトニアンを評価する際に用いられる．

演算子 $c_{p,s}{}^\dagger$, $d_{p,s}{}^\dagger$ が生成演算子，$c_{p,s}$, $d_{p,s}$ が消滅演算子であることは次のようにしてわかる．全粒子数演算子 $N$ を

$$N=\sum_p(n_{p,1}{}^{(+)}+n_{p,2}{}^{(+)}+n_{p,1}{}^{(-)}+n_{p,2}{}^{(-)}) \qquad (5\cdot 61)$$

と定義する．反交換関係 (5·53) を用いると

$$\begin{aligned}
&[c_{p',r}, n_{p,s}{}^{(+)}]=c_{p',r}\delta_{p,p'}\delta_{r,s}\\
&[c_{p',r}{}^\dagger, n_{p,s}{}^{(+)}]=-c_{p',r}{}^\dagger\delta_{p,p'}\delta_{r,s}\\
&[d_{p',r}, n_{p,s}{}^{(-)}]=d_{p',r}\delta_{p,p'}\delta_{r,s}\\
&[d_{p',r}{}^\dagger, n_{p,s}{}^{(-)}]=-d_{p',r}{}^\dagger\delta_{p',p}\delta_{r,s}\\
&[c_{p',r}, n_{p,s}{}^{(-)}]=[c_{p',r}{}^\dagger, n_{p,s}{}^{(-)}]=[d_{p',r}, n_{p,s}{}^{(+)}]=[d_{p',r}{}^\dagger, n_{p,s}{}^{(+)}]=0
\end{aligned} \qquad (5\cdot 62)$$

が得られる．また

$$[n_{p,s}{}^{(\pm)}, n_{p',r}{}^{(\pm)}]=[n_{p,s}{}^{(+)}, n_{p',r}{}^{(-)}]=0 \qquad (5\cdot 63)$$

となるから

$$[H,N]=0 \qquad (5\cdot 64)$$

となり，$H$ と $N$ を同時に対角化できる．いま，$H$ と $N$ の固有値をそれぞれ $E$, $n$ とし，固有ベクトルを $|E,n\rangle$ とする．

$$H|E,n\rangle=E|E,n\rangle \qquad (5\cdot 65)$$

$$N|E,n\rangle=n|E,n\rangle \qquad (5\cdot 66)$$

さらに，演算子 $b_p$ および $b_p{}^\dagger$ は，$c_{p,s}$, $d_{p,s}$ および $c_{p,s}{}^\dagger$, $d_{p,s}{}^\dagger$ を表すものとすると，(5·62) により

$$[H,b_p]=-E_pb_p \qquad (5\cdot 67)$$

$$[H,b_p{}^\dagger]=E_pb_p{}^\dagger \qquad (5\cdot 68)$$

$$[N,b_p]=-b_p \qquad (5\cdot 69)$$

$$[N,b_p{}^\dagger]=b_p{}^\dagger \qquad (5\cdot 70)$$

であることがわかる．

$(5\cdot65)$, $(5\cdot66)$, および $(5\cdot67)$ を用いると

$$Hb_p|E,n\rangle = b_pH|E,n\rangle - E_pb_p|E,n\rangle$$
$$= (E-E_p)b_p|E,n\rangle \tag{5·71}$$

となる. 同様にして

$$Hb_p^\dagger|E,n\rangle = (E+E_p)b_p^\dagger|E,n\rangle \tag{5·72}$$
$$Nb_p|E,n\rangle = (n-1)b_p|E,n\rangle \tag{5·73}$$
$$Nb_p^\dagger|E,n\rangle = (n+1)b_p^\dagger|E,n\rangle \tag{5·74}$$

が得られ, これらの結果から $b_p$, $b_p^\dagger$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子または反粒子を, 消滅あるいは生成する演算子であることがわかる.

以上の結果より, 真空の状態ベクトル $|0\rangle$ を

$$H|0\rangle = 0, \quad N|0\rangle = 0 \tag{5·75}$$

によって定義することができる. $(5\cdot75)$ は

$$b_p|0\rangle = 0 \tag{5·76}$$

を意味している.

一般に, 運動量およびスピン方向が $(\boldsymbol{p}_1, s_1)$, $(\boldsymbol{p}_2, s_2)$, …, $(\boldsymbol{p}_m, s_m)$ の $m$ 個の粒子と, 運動量およびスピン方向が $(\boldsymbol{p}_1', s_1')$, $(\boldsymbol{p}_2', s_2')$, …, $(\boldsymbol{p}_n', s_n')$ の $n$ 個の反粒子が存在する状態の, 規格化された状態ベクトルは

$$|\boldsymbol{p}_1, s_1, \boldsymbol{p}_2, s_2, \cdots, \boldsymbol{p}_m, s_m;\ \boldsymbol{p}_1', s_1', \boldsymbol{p}_2', s_2', \cdots, \boldsymbol{p}_n', s_n'\rangle$$
$$= c_{\boldsymbol{p}_1,s_1}^\dagger c_{\boldsymbol{p}_2,s_2}^\dagger \cdots c_{\boldsymbol{p}_m,s_m}^\dagger d_{\boldsymbol{p}_1',s_1'}^\dagger d_{\boldsymbol{p}_2',s_2'}^\dagger \cdots d_{\boldsymbol{p}_n',s_n'}^\dagger |0\rangle \tag{5·77}$$

と表すことができる.

### B. 電子と光子との相互作用

この小節では $e$ を素電荷とし正の量としてとり扱う. 電荷 $-e$ の電子と光子との相互作用を含むハミルトニアン $H$ は

$$H = H_0 + H_I \tag{5·78}$$

$$H_0 = \int \bar{\psi}(\boldsymbol{r})(\hbar c\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + mc^2)\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \frac{1}{8\pi}\int [\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r})]d\boldsymbol{r} \tag{5·79}$$

$$H_I = ie\int \sum_{\mu=1}^{4} \bar{\psi}(\boldsymbol{r})\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})A_\mu(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{5·80}$$

と書くことができる. $H_0$ は電子および光子の自由場における全エネルギーを表し, $H_I$ は電子と光子の相互作用エネルギーを表している. Heisenberg の運動方程式

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{i}{\hbar}[H,\psi] \tag{5·81}$$

に (5·78) を代入し，交換関係 (5·47) を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_\sigma}{dt}=&\frac{i}{\hbar}\sum_{\rho,\tau=1}^{4}\left[\int\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+mc^2\beta)_{\rho\tau}\psi_\tau(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}',\psi_\sigma(\boldsymbol{r})\right]\\
&+\frac{i}{\hbar}\sum_{\rho,\tau=1}^{4}\left[ie\int\sum_{\mu=1}^{4}\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\rho\tau}\psi_\tau(\boldsymbol{r}')A_\mu(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}',\psi_\sigma(\boldsymbol{r})\right]\\
=&\frac{i}{\hbar}\sum_{\rho,\tau=1}^{4}\left\{-\int\Big(\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')\psi_\sigma(\boldsymbol{r})+\psi_\sigma(\boldsymbol{r})\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')\Big)\right.\\
&\times(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+mc^2\beta)_{\rho\tau}\psi_\tau(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\
&\left.-ie\int\Big(\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')\psi_\sigma(\boldsymbol{r})+\psi_\sigma(\boldsymbol{r})\psi_\rho{}^*(\boldsymbol{r}')\Big)\sum_{\mu=1}^{4}(\gamma_4\gamma_\mu)_{\rho\tau}\psi_\tau(\boldsymbol{r}')A_\mu(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\right\}\\
=&-\frac{i}{\hbar}\sum_{\rho,\tau=1}^{4}\int\delta_{\rho,\sigma}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\Big[-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+mc^2\beta+ie\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_4\gamma_\mu A_\mu(\boldsymbol{r}')\Big]_{\rho\tau}\\
&\times\psi_\tau(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\\
=&-\frac{i}{\hbar}\sum_{\tau=1}^{4}\Big(-i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2\beta+ie\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_4\gamma_\mu A_\mu(\boldsymbol{r})\Big)_{\sigma\tau}\psi_\tau(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

両辺に左から $\frac{1}{ic}(\gamma_4)_{\rho\sigma}$ を掛け，$\sigma$ について和をとり，右辺を全部左辺に移項すると，

$$\sum_{\tau=1}^{4}\left[\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\Big(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{ie}{\hbar c}A_\mu\Big)+\frac{mc}{\hbar}\right]_{\rho\tau}\psi_\tau=0 \tag{5·82}$$

これは電磁場がある場合の電子の Dirac 方程式であるから，(5·78) が正しいハミルトニアンであることがわかる．この式では $e$ は正の量であることに注意せよ.

電子と光子との相互作用の大きさは $e^2/\hbar c(\sim 1/137)$ 程度であるから，$H_0$ の固有状態を基底にとることにより，摂動計算が許される.

## 5·3 時間を含む摂動論

この節では，電子による光子の散乱や，原子による光の放出ならびに吸収など，状態間の遷移をとり扱う際に有効な**摂動論**について述べる.

系のハミルトニアンを

$$H=H_0+H_I \tag{5·83}$$

のように，無摂動ハミルトニアン $H_0$ と，相互作用を表す項 $H_I$ との和として書き表す．状態ベクトル $|\Psi\rangle$ の時間的変化は Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle(t)\rangle=H|\Psi(t)\rangle \tag{5・84}$$

で表される．$H_I$ は時間を陽に含まないものとする．ここで $|\Psi\rangle$ の代わりに

$$\Psi'(t)\rangle=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi(t)\rangle$$

とユニタリー変換された $|\Psi'(t)\rangle$ を用いると，(5・84) は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi'(t)\rangle)=He^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi'(t)\rangle$$

となり，したがって

$$H_0e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi'(t)\rangle+i\hbar e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'(t)\rangle=(H_0+H_I)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi'(t)\rangle$$

これより

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'(t)\rangle=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}H_Ie^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi'(t)\rangle$$

が得られる．すなわち Schrödinger 表示での $|\Psi(t)\rangle$，$H_I$ から

$$|\Psi'(t)\rangle=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}|\Psi(t)\rangle \tag{5・85}$$

$$H_I'(t)=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}H_Ie^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} \tag{5・86}$$

のように変換された $|\Psi'(t)\rangle, H_I'(t)$ に移ると，Schrödinger 方程式(5・84)は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'(t)\rangle=H_I'(t)|\Psi'(t)\rangle \tag{5・87}$$

となる．Schrödinger 表示では，系の時間的変化は状態ベクトルの時間的変化によって表され，Heisenberg 表示では，演算子の時間的変化によって表された．ところが，(5・85)，(5・86) で与えられた表示では，状態ベクトルも演算子も時間に依存している．このような表示を**相互作用表示**という．この表示では，(5・87) からわかるように，$|\Psi'(t)\rangle$ の時間変化は相互作用ハミルトニアン $H_I'(t)$ によって生ずる．また Schrödinger 表示での演算子 $F$ は

$$F'(t)=e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}Fe^{-\frac{i}{\hbar}H_0t}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial F'(t)}{\partial t}=[H_0,F'(t)] \tag{5・88}$$

を満たすから，演算子 $F'$ の時間的変化は $H_0$ から生ずる．

今後は上記の相互作用表示を用いて議論を進めよう．ある時刻 $t_0$ における状態ベクトル $|\Psi(t_0)\rangle$（以後 $\Psi'(t)$ を単に $\Psi(t)$ と書く）を与えるとき，任意の時刻 $t$ における状態ベクトル $|\Psi(t)\rangle$ が

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle \tag{5·89}$$

と与えられるとする．このとき，明らかに

$$U(t_0, t_0) = 1 \tag{5·90}$$

(5·89) を (5·87) に代入すると

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_I'(t)\,U(t, t_0) \tag{5·91}$$

となる．(5·91) をそのまま積分すると

$$U(t, t_0) = U(t_0, t_0) - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H_I'(t)\,U(t, t_0)\,dt$$

が得られ，右辺の積分の $U(t, t_0)$ の中に上式を繰返し代入すると

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I'(t_1)\,H_I'(t_2)\cdots H_I'(t_n) \tag{5·92}$$

を得る．

我々がしばしば問題にするのは，十分遠い過去 ($t_0 \to -\infty$) における状態ベクトル $|\Psi(-\infty)\rangle$ が与えられたとき，十分遠い未来 ($t \to +\infty$) における状態ベクトル $|\Psi(+\infty)\rangle$ を求めること，すなわち状態の遷移である．この場合，相互作用 $H_I'(t)$ は $t = -\infty$ ではなく，それ以後徐々に加わり，$t \to +\infty$ で徐々に消え去ると仮定する．(5·86) の $H_I'(t)$ を

$$H_I'(t) \longrightarrow H_I'(t)e^{-\beta|t|} \qquad (\beta > 0) \tag{5·93}$$

とおきかえる．$\beta$ が十分小さい限り，計算結果はあまり $\beta$ にはよらず，最後に $\beta \to 0$ とする．このようなおきかえを**断熱操作**という．

$t_0 \to -\infty$，$t \to +\infty$ とした場合

$$|\Psi(+\infty)\rangle = S|\Psi(-\infty)\rangle, \qquad S = U(+\infty, -\infty) \tag{5·94}$$

とおくとき，$S$ を **$S$ 行列**という．上のような断熱操作を行なうと，$t \to \pm\infty$ では $H = H_0$ となり，(5·87) より $|\Psi(\pm\infty)\rangle$ は Heisenberg 表示での状態ベクトルとなり，時間には依存しない．したがって $t = -\infty$ で $H_0$ の固有状態 $|\Psi_i\rangle$ にあった粒子が，時間の経過に従って加えられた相互作用の結果，$t = +\infty$ で

別の固有状態 $|\Psi_f\rangle$ に見出される確率振幅は

$$S_{fi}=\langle\Psi_f|S|\Psi_i\rangle \tag{5·95}$$

で与えられる．そこで，(5·92)～(5·94) より

$$S=1+\lim_{\beta\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_nH_I'(t_1)H_I'(t_2)\cdots H_I'(t_n) \tag{5·96}$$

上式の行列要素 $S_{fi}$ は次のように与えられる．

$$S_{fi}=\delta_{f,i}+\lim_{\beta\to0}\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\langle f|H_I'(t_1)|i\rangle\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\langle f|H_I'(t_1)H_I'(t_2)|i\rangle+\cdots\right] \tag{5·97}$$

ここで $\Psi_i$ および $\Psi_f$ をそれぞれ $i$ および $f$ と略記した．始状態 $i$，終状態 $f$ のエネルギーをそれぞれ $E_i$，$E_f$ とすると

$$\langle f|H_I'(t)|i\rangle=\langle\Psi_f|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t}H_Ie^{-\frac{i}{\hbar}H_0t-\beta|t|}|\Psi_i\rangle$$
$$=e^{\frac{i}{\hbar}E_ft}\langle\Psi_f|H_I|\Psi_i\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_it-\beta|t|}$$
$$=e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t-\beta|t|}\langle f|H_I|i\rangle$$

この結果を (5·97) に代入し

$$\lim_{\beta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t-\beta|t|}\,dt=2\pi\hbar\delta(E_i-E_f)$$

を用いると，$H_I$ についての1次の項 $S_{fi}^{(1)}$ は

$$S_{fi}^{(1)}=\lim_{\beta\to0}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\langle f|H_I'|i\rangle=-2\pi i\delta(E_f-E_i)\langle f|H_I|i\rangle \tag{5·98}$$

となる．

次に $H_I$ についての2次の項 $S_{fi}^{(2)}$ を求めてみよう．

$$S_{fi}^{(2)}=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\langle f|H_I'(t_1)|n\rangle\langle n|H_I'(t_2)|i\rangle$$

ここで，完備系として，$H_0$ の固有状態 $|n\rangle$（固有値 $E_n$）をとることにする．

$$\sum_n|n\rangle\langle n|=1 \tag{5·99}$$

を用いると (5·98) は

$$S_{fi}^{(2)}=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f-E_n)t_1-\beta|t_1|+\frac{i}{\hbar}(E_n-E_i)t_2-\beta|t_2|\right]$$

となる．$t_2=t_1-\tau$ と変数変換を行ない，$\beta$ が無限小量であることに注意すると

$$S_{fi}^{(2)}=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_n \langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t_1\right]\int_0^{\infty}d\tau\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(E_n-E_i)\tau-\beta\tau\right]$$
$$=-2\pi i\,\delta(E_f-E_i)\sum_n\frac{\langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle}{E_i-E_n+i\beta} \tag{5・100}$$

を得る．このように中間に現れる状態 $|n\rangle$ を中間状態という．最後の式では，$\hbar\beta$ を $\beta$ と改めてある．以下同様に計算すると

$$S_{fi}=\delta_{f,i}-2\pi i\delta(E_f-E_i)\lim_{\beta\to 0}\left[\langle f|H_I|i\rangle+\sum_n\frac{\langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle}{E_i-E_n+i\beta}\right.$$
$$\left.+\sum_n\sum_{n'}\frac{\langle f|H_I|n'\rangle\langle n'|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle}{(E_i-E_{n'}+i\beta)(E_i-E_n+i\beta)}+\cdots\right] \tag{5・101}$$

したがって，$S$ 行列の具体的な形は

$$S_{fi}=\delta_{f,i}-2\pi i\delta(E_f-E_i)M_{fi} \tag{5・102}$$

ここに

$$M_{fi}=\langle f|H_I|i\rangle+\lim_{\beta\to 0}\sum_n\frac{\langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle}{E_i-E_n+i\beta}+\cdots \tag{5・103}$$

状態 $i$ から状態 $f$ への遷移確率は $(i\neq f)$

$$W_{fi}=|S_{fi}|^2=(2\pi)^2|M_{fi}|^2[\delta(E_f-E_i)]^2$$
$$=\frac{2\pi}{\hbar}|M_{fi}|^2\delta(E_f-E_i)\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i}{\hbar}(E_f-E_i)t}dt \tag{5・104}$$

である．ここで，積分の中の被積分関数は前についているデルタ関数のために 1 となっている．すなわち，積分の値は，相互作用がはたらいている時間 $T$ に等しい．したがって**単位時間あたりの遷移確率**は

$$w_{fi}=\frac{2\pi}{\hbar}|M_{fi}|^2\delta(E_f-E_i) \tag{5・105}$$

となる．実際には，多くの問題で，エネルギーのみでなく運動量も保存するから，このような場合には

$$M_{fi}=\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)\mathscr{M}_{fi} \tag{5・106}$$

とおくと，(5・102) は

$$S_{fi}=\delta_{f,i}-2\pi i\mathscr{M}_{fi}\delta^4(P_f-P_i) \tag{5・107}$$

ここで，$\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{P}_f$ はそれぞれ始状態，終状態の運動量であり，$\delta^4(P_f-P_i)=$

$\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)\delta(E_f-E_i)$ とする．(5·106) を用いて $|M_{fi}|^2$ を計算すると

$$|M_{fi}|^2=|\mathscr{M}_{fi}|^2[\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)]^2$$
$$=|\mathscr{M}_{fi}|^2\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}$$

この場合も，$t$ に関する積分の場合と同様に，前にあるデルタ関数のために，被積分関数は1となるので，粒子が一辺 $L$ の立方体に閉じこめられているときは，積分の値は $L^3$ となる．したがって

$$|M_{fi}|^2=|\mathscr{M}_{fi}|^2\delta^3(\boldsymbol{P}_f-\boldsymbol{P}_i)\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}$$

となる．そこで，終状態に $n$ 個の粒子が存在するときには，$n$ 個の粒子の状態の数を掛けて

$$dW=\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\frac{2\pi}{\hbar}|\mathscr{M}_{fi}|^2\delta^4(P_f-P_i)\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}d\mathbf{p}_1\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}d\mathbf{p}_2\cdots$$
$$\cdots\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}d\mathbf{p}_n \qquad (5\cdot 108)$$

となる．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots$ は終状態の $n$ 個の粒子の運動量である．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots$ について積分すると**全遷移確率** $W$ が得られる．

**散乱断面積** $\sigma$ は，$W$ を毎秒単位面積を通過してくる粒子の個数 $n_0$ で割ることによって得られる．

$$\sigma=\frac{W}{n_0} \qquad (5\cdot 109)$$

# 6

# 光子と物質との相互作用

## 6·1　輻射場と物質との相互作用

原子や分子が光を放出したり，吸収したり，また散乱させる現象はすべて，原子や分子の構成要素である電子と輻射場との相互作用によって引き起こされる．輻射場の量子化はすでに5章でなされたので，この章では，量子化された輻射場と物質との相互作用について述べることにする．ただし，物質の運動は非相対論的にとり扱う．すなわち，Schrödinger 方程式によって記述されるものとする．第2量子化された電子と輻射場との相互作用については，7章でとり扱う．

物質粒子と輻射場が共存する場合，輻射場を独立な力学系としてとり扱えば，全系のハミルトニアンは，輻射場の中の粒子のハミルトニアン $H_p'$ と，輻射場のハミルトニアン $H_R$ の和になる．

$$H = H_p' + H_R \tag{6·1}$$

輻射場の中の荷電粒子に対するハミルトニアンは，すでに §2·6 で与えられている．(2·95) に対応する荷電粒子系のハミルトニアン演算子は Coulomb ゲージで

$$H_p' = \sum_i \frac{1}{2m_i}\left[\boldsymbol{p}_i - \frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\right]^2 + \sum_{i<j} \frac{e_i e_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}$$

となり，これは輻射場のないときのハミルトニアンにおいて，$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - (e/c)\boldsymbol{A}$ なるおきかえを行なうことに相当する．一般の荷電粒子系と輻射場との全ハミルトニアン (6·1) は Coulomb ゲージで，Schrödinger 表示で

$$H=\sum_i \frac{1}{2m_i}\left[\boldsymbol{p}_i-\frac{e_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\right]^2+\sum_{i<j}\frac{e_ie_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}+\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1,2}\hbar\omega_k a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger a_{\boldsymbol{k},\lambda} \quad (6\cdot2)$$

と表される．ここで $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger$，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ はそれぞれ (5・40) の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},0)$，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger(0)$，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}(0)$ である．(6・2) の第2項は，荷電粒子間のクーロン相互作用を表している．もしも，物質が磁気能率をもっている場合には，さらに磁気能率による相互作用を (6・2) につけ加えなければならないが，ここでは磁気能率の相互作用についての議論はしないことにする．

ハミルトニアン (6・2) が正しいかどうかは，それぞれの物質に対して，実験的に確かめなければならないが，電子の場合にはよく成り立つことが実際に確かめられている．特に，1電子と輻射場との相互作用ハミルトニアンは (6・2) より

$$H_I=\frac{e}{2mc}[\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}]+\frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \quad (6\cdot3)$$

となる．$m$ は電子の質量，$-e(e>0)$ を電子の電荷とするので，(6・2) で $e$ を $-e$ でおきかえてある．ここで，量子化された輻射場に対する横波の条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ を考慮すると，(6・3) の運動量演算子 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{A}$ が交換可能となることを示そう．まず，座標 $(x,y,z)=\boldsymbol{r}$ の関数 $u(\boldsymbol{r})$ に対して

$$[u(\boldsymbol{r}),p_x]=u(\boldsymbol{r})p_x-p_xu(\boldsymbol{r})=i\hbar\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r}) \quad (6\cdot4)$$

が成り立つ．実際，$p_x$ として $-i\hbar\partial/\partial x$ を用い，(6・4) の左辺を $\boldsymbol{r}$ の任意の関数 $v(\boldsymbol{r})$ に作用させると

$$\begin{aligned}[u(\boldsymbol{r}),p_x]v(\boldsymbol{r})&=-i\hbar\left[u(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r})\right]v(\boldsymbol{r})\\&=-i\hbar\left[u(\boldsymbol{r})\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial x}-v(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x}-u(\boldsymbol{r})\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial x}\right]\\&=v(\boldsymbol{r})\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r})\right]\end{aligned}$$

上の式で，第1行から第2行に移る際に，$\boldsymbol{r}$ のすべての成分は交換可能なので，$u(\boldsymbol{r})$ と $v(\boldsymbol{r})$ とは交換可能であることを用いた．$v(\boldsymbol{r})$ は任意の関数なので，これは

$$[u(\boldsymbol{r}),p_x]=i\hbar\frac{\partial}{\partial x}u(\boldsymbol{r})$$

と同等である．$p_y$, $p_z$ に対しても同様な式が成り立つ．次に，$\boldsymbol{r}$ のベクトル関数 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ に対しても

$$[w_x(\boldsymbol{r}), p_x] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} w_x(\boldsymbol{r})$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{p}] &= i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x} w_x(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial y} w_y(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial z} w_z(\boldsymbol{r})\right] \\ &= i\hbar \operatorname{div} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \qquad (6\cdot5)$$

を得る．(6·5) において $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ とすると

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = i\hbar \operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$$

となって，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{A}$ は交換可能であることが示された．そこで，(6·3) の相互作用ハミルトニアン $H_I$ を光子の生成，消滅演算子 $a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger$，$a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ を用いて表すと

$$H_I = H_1 + H_2$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p} \\ &= \frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{h}{\omega_k}}\,[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}](\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p}) \end{aligned} \qquad (6\cdot6)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{e^2}{2m}\frac{1}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\sum_{\lambda,\lambda'}\sqrt{\frac{h^2}{\omega_k\omega_{k'}}}\,(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}] \\ &\quad\times[a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}] \end{aligned} \qquad (6\cdot7)$$

となる．(6·6) の相互作用ハミルトニアン $H_1$ は光子を1個消滅させるか生成する演算子を含んでいるので，光子の吸収・放出の現象において，重要な役割をする．それに対して，(6·7) の $H_2$ は輻射場の異なるモードの間の相互作用を表し，散乱をとり扱うときに重要な役割を果たす．電子と輻射場とが相互作用する物理現象は，電子の磁気能率による相互作用を除いて，すべて (6·6), (6·7) の相互作用ハミルトニアンによって表される．

まず，原子による光の放出，吸収の問題について論じよう．

### A. 原子からの光の放出(emission)

原子は正の電荷をもつ原子核のまわりを，いくつかの電子が Schrödinger 方程式によって与えられる軌道を回っている．原子がある励起状態からエネルギ

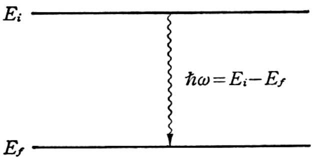



**図 6·1**　励起状態 $E_i$ にある原子は，エネルギー $E_i-E_f=\hbar\omega$ の光子を放出して，より低い準位 $E_f$ に遷移する．

ーの低い状態に遷移するとき，すなわち電子がある軌道（エネルギー $E_m$）からエネルギーのより低い軌道（$E_n$）に移るとき，そのエネルギー差 $E_m-E_n$ に等しいエネルギーをもった光子が放出される．いま原子から放出された光子は $(\boldsymbol{k}, \lambda)$ で規定された量子であり，しかも始状態では，この状態にある光子が $n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ 個あったとする．そうすると，終状態では $n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1$ 個の光子が存在することになる．相互作用ハミルトニアン $H_1$ は光子の生成演算子を1個含んでいるので，摂動の1次で零でない寄与を与えるが，$H_2$ は光子の数を0または ±2 変化させるので，1次では効かない．そこで，光子の放出を表す遷移行列要素を次のように計算する．

まず摂動論を使うために，ハミルトニアン $H$ を次のように分離する．

$$H=H_0+H_I, \qquad H_0=H_e+H_R \tag{6·8}$$

$$H_e=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+v(\boldsymbol{r}), \quad H_R=\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}$$

$$H_I=H_1$$

$$=\frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda}\sqrt{\frac{h}{\omega_{\boldsymbol{k}}}}\,[a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}](\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p}) \tag{6·9}$$

ここで，(6·8) の $v(\boldsymbol{r})$ は原子核と電子の間のクーロン相互作用を表す．$H_e$ は輻射場と電子との相互作用がない場合の電子のハミルトニアン，$H_R$ は輻射場選ハミルトニアンである．非摂動ハミルトニアン $H_0$ の固有関数を次のようにのぶ．原子内の軌道電子の輻射場がないときのハミルトニアン

$$H_e=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+v(\boldsymbol{r})$$

の固有関数の1つを $\psi_n$，そのときの固有値を $E_n$，エネルギー $\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ をもった輻射場の固有関数を $\varphi_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}}$（または $|\{n_{\boldsymbol{k},\lambda}\}\rangle$）とすると，$E_n+\sum_{\boldsymbol{k},\lambda}n_{\boldsymbol{k},\lambda}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ のエネルギーをもつ $H_0$ の固有関数は $\psi_n\varphi_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}}$ と表される．

光の放出の遷移確率を求めるには，(5·105)を使う．したがって，摂動項 $H_1$ の始状態 $\psi_i\varphi_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}}$ と終状態 $\psi_f\varphi_{n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1}$ の間の行列要素を計算すればよい．この行列要素を $\langle f; n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|H_1|i; n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle$ と書くことにすると

$$M_{fi}=\langle f;n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|H_1|i;n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle$$
$$=\frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{h}{\omega_k}}\left[\int_{L^3}\psi_f{}^*e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})\psi_i d\boldsymbol{r}\langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger|n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle\right.$$
$$\left.+\int_{L^3}\psi_f{}^*e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})\psi_i d\boldsymbol{r}\langle n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|a_{\boldsymbol{k},\lambda}|n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle\right]$$
$$=\frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{(n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1)h}{\omega_k}}\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle \tag{6·10}$$

ここで

$$\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle\equiv\int_{L^3}\psi_f{}^*e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})\psi_i d\boldsymbol{r}$$

(5·105) より遷移確率は単位時間につき

$$w_{fi}=\frac{2\pi}{\hbar}|M_{fi}|^2\delta(\mathscr{E}_f-\mathscr{E}_i)$$

である．原子の始状態，終状態のエネルギーを $E_i$，$E_f$ としたので，混乱を避けるために，ここでは系の始状態，終状態のエネルギーを $\mathscr{E}_i$，$\mathscr{E}_f$ と書く．終状態の光子の波数 $\boldsymbol{k}$ について和をとると

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}}|\langle f;n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|H_1|i;n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle|^2\delta(\mathscr{E}_f-\mathscr{E}_i) \tag{6·11}$$

ここで，長さ $L$ を十分大きくとり

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\rightarrow\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\qquad(d\boldsymbol{k}=dk_xdk_ydk_z) \tag{6·12}$$

とおきかえると，(6·11) は

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}|\langle f;n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1|H_1|i;n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle|^2\delta(\mathscr{E}_f-\mathscr{E}_i) \tag{6·13}$$

となる．この式に (6·10) を代入し，$\boldsymbol{k}$ について積分すると，単位時間に，($\boldsymbol{k}$, $\lambda$) で規定された光子を，$\boldsymbol{k}$ を含む立体角 $d\Omega$ 内に放出する確率が得られる．すなわち

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{L^3}{(2\pi)^3}\frac{e^2}{m^2}\frac{d\Omega}{L^3}\int\frac{(n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1)h}{\omega_k}|\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle|^2\delta(\mathscr{E}_f-\mathscr{E}_i)$$
$$\times k^2dk$$

ここで

$$\mathscr{E}_f=E_f+\hbar|\boldsymbol{k}|c=E_f+\hbar kc,\quad\mathscr{E}_i=E_i$$
$$\hbar kc=\hbar\omega_k \tag{6·14}$$

であるから，$\boldsymbol{k}$ についての積分を $\omega_k$ についての積分に変えると

$$w=\frac{e^2}{2\pi\hbar m^2}\frac{d\Omega}{c^3}\int\frac{(n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1)}{\omega_k}|\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle|^2\omega_k{}^2$$

$$\times\delta\left(\omega_k-\frac{E_i-E_f}{\hbar}\right)d\omega_k$$

$$=\frac{e^2\omega_k}{2\pi m^2c^3\hbar}(n_{\boldsymbol{k},\lambda}+1)|\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle|^2d\Omega \qquad (6\cdot15)$$

$$\omega_k=(E_i-E_f)/\hbar$$

が導かれる．ただし，これは，上に述べたように，光の偏りをある特定方向に指定したときの**放出の遷移確率**であるから，偏りを指定しない場合には，(6·15) において，2つの偏りについて和をとる必要がある．その上で，$d\Omega$ について積分すれば，単位時間あたりの原子の崩壊の確率が得られる．(6·15) は $n_{\boldsymbol{k},\lambda}=0$ のときでも零にならない．いいかえると，初めに輻射場が存在しない場合にも，原子から光の放出が起こり得る．このような過程を特に**自然放出** (spontaneous emission) といい，それに対して，$n_{\boldsymbol{k},\lambda}\neq 0$ の場合の光の放出は**誘導放出** (induced emission) と呼ばれる．自然放出については，さらに節を改めて詳しい議論をしよう．

### B. 光の吸収 (absorption)

光が物質の中を通過するとき，光は物質中の電子と (6·3) に従って相互作用するので，光の吸収や散乱が起こる．光の散乱は後でとり扱うことにして，ここでは，原子による光の吸収について述べよう．いま，状態 $i$ の原子が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$，偏りが $\lambda$ である光子を吸収して，エネルギーのより高い励起状態 $f$ に遷移する場合を考える．光子のエネルギー $\hbar\omega_k$ は原子の励起エネルギーとして原子に与えられる．ゆえに，入射光子のエネルギー $\hbar\omega_k$ が原子の励起エネルギー $E_f-E_i$ に等しいとき，上のような吸収が起こる．議論を簡単にするために，始状態では $(\boldsymbol{k},\lambda)$ の光子のみが存在するとし，その数を $n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ としよう．光の放出の場合と同様に，吸収も (6·6) の相互作用ハミルトニアン $H_1$ の一次の摂動で起こる．したがって，吸収の遷移行列要素は (5·16) を用いて

$$\langle f;n_{\boldsymbol{k},\lambda}-1|H_1|i;n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle$$

$$=\frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{h}{\omega_k}}\langle f;n_{\boldsymbol{k},\lambda}-1|a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i;n_{\boldsymbol{k},\lambda}\rangle$$

$$=\frac{e}{m}\frac{1}{L^{3/2}}\sqrt{\frac{n_{k,\lambda}h}{\omega_k}}\langle f|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle \tag{6・16}$$

となる．この遷移行列要素は，原子の波動関数 $\psi_i$, $\psi_f$ さえわかっていれば原理的に計算でき，吸収の遷移確率も，放出の場合と同様にして求めることができる．すなわち，**吸収の遷移確率**は

$$w=\frac{e^2\omega_k}{2\pi m^2c^3\hbar}n_{k,\lambda}|\langle f|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle|^2d\Omega \tag{6・17}$$

である．

さて，特に光の吸収が全く放出の逆過程になっている場合を考えてみよう．ある原子に2つの固有状態 $a$, $b$ があり，$a$ 状態の原子が $(\boldsymbol{k},\lambda)$ の光子を1個放出して，$b$ 状態に遷移したとする．エネルギー保存則より，放出された光子のエネルギー $\hbar\omega_k$ は $E_a-E_b$ である．このような光の放出を簡単に $a\to b+\gamma$ で表すことにする．逆に，$(\boldsymbol{k},\lambda)$ の光子が $b$ 状態の原子にエネルギー $\hbar\omega_k$ を与えて，原子を $a$ 状態に励起する過程も存在する．これはいうまでもなく，$b+\gamma\to a$ と表せる光の吸収である．

$a\to b+\gamma$ の遷移で，光子が立体角 $d\Omega$ 内に放出される確率は，(6・15) においてi $i=a$, $f=b$ とおけば求められる．その確率を $w(a\to b+\gamma)$ と書くことにする．逆に，$d\Omega$ の方向から進んできた光子が原子に吸収されて，$b+\gamma\to a$ の遷移が起こる確率を $w(b+\gamma\to a)$ とすると，(6・15)，(6・17) より，これらの間には次のような関係があることがわかる．

$$\frac{w(a\to b+\gamma)}{w(b+\gamma\to a)}=\frac{(n_{k,\lambda}+1)|\langle b|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|a\rangle|^2}{n_{k,\lambda}|\langle a|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|b\rangle|^2} \tag{6・18}$$

ここで，光の横波の条件 $(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k})=0$ を利用すると

$$\begin{aligned}\langle a|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|b\rangle^* &=\langle b|(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}|a\rangle\\ &=-\hbar\langle b|(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}|a\rangle+\langle b|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|a\rangle\\ &=\langle b|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|a\rangle\end{aligned} \tag{6・19}$$

となる．(6・19) から (6・18) は

$$\frac{w(a\to b+\gamma)}{w(b+\gamma\to a)}=\frac{n_{k,\lambda}+1}{n_{k,\lambda}} \tag{6・20}$$

と簡単な式に書くことができる．この結果は，原子の種類によらないことに特に注意してほしい．したがって，光の吸収の遷移確率は (6・15) の放出の確率

と (6・20) の関係式を使って，容易に導くことができる．

## 6・2 双 極 輻 射

原子により光子が立体角 $d\Omega$ 内に放出される確率は，前節の一般的議論によると，(6・15) で与えられる．これからわかるように，結局，光の放出の問題は，原子の固有状態についての行列要素

$$\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}|i\rangle \equiv \int \psi_f{}^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{p}\psi_i d\boldsymbol{r} \tag{6・21}$$

を求めることに帰着できる．原子の波動関数 $\psi_i, \psi_f$ は，いわゆる原子の拡がり（定常状態では，中心Oのまわりの半径 $R\sim10^{-8}$cm 程度の球の内部と考えられる）よりも遠方へいくと，急激に減少し，零に近づく．ゆえに，原子の半径を $R$ とすると，$|\boldsymbol{r}|\lesssim R$ の領域における積分のみが，(6・21) の空間積分に主に寄与する．

さて，放出された光子のエネルギー $E$ は，エネルギー保存則により，$E=E_i-E_f$ であるから，$E$ の大きさの程度は電子の結合エネルギーの程度と考えてよい．古典論的に考えると，電子がクーロン・ポテンシャルの中で，半径 $R$ の円運動をしているとき，そのエネルギー $E_B$ は，原子核の電荷を $Ze$，電子の質量を $m$，速さを $v$ とすると

$$E_B=T-\frac{Ze^2}{R},\quad T=\frac{1}{2}mv^2 \tag{6・22}$$

で与えられる．一方，円運動の遠心力はクーロン力とつり合っているので

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{Ze^2}{R^2} \tag{6・23}$$

が成り立つ．(6・23) を (6・22) に代入すると

$$E_B=\frac{1}{2}mv^2-\frac{Ze^2}{R}=-\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{R}$$

となり，$E_B$ はクーロン・エネルギーの半分である．水素原子の場合には，$|E_B|=e^2/2R$ となる．したがって，光子のエネルギー $E$ は

$$E\sim\frac{e^2}{2R} \tag{6・24}$$

の程度であり，また波数ベクトルの大きさ $k$ と $E$ との関係式 (6・14) を用いると

$$kR \sim \frac{e^2}{2c\hbar} \tag{6・25}$$

ここで $e^2/\hbar c$ は無次元の数で，値は約 1/137，**微細構造定数** (fine structure constant) と呼ばれ，$\alpha$ で表される．したがって

$$kR \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{137} \tag{6・26}$$

が得られる．(6・26) は，通常の原子による光の放出の場合，$kR \ll 1$ となっていることを示している．積分 (6・21) の中にある指数関数を展開とすると

$$e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 1 - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})^2/2 + \cdots \tag{6・27}$$

となり，積分に効く積分変数 $\boldsymbol{r}$ の範囲が $|\boldsymbol{r}| \lesssim R$ であることを考えると，$kR \ll 1$ の場合，第 2 項以下は省略して，1 で近似してよいであろう．それゆえ，(6・21) は $\langle f|\boldsymbol{p}|i\rangle$ としてさしつかえない．このような近似を**双極近似** (dipole approximation) という．ところで，クーロン・ポテンシャル $v(\boldsymbol{r})$ は位置座標 $\boldsymbol{r}$ のみの関係であるから，$\boldsymbol{r}$ と可換である．したがって，位置と運動量との交換関係 $[x_m, p_n] = i\hbar\delta_{m,n}$ を用いると

$$\begin{aligned}[x_m, \boldsymbol{p}^2] &= \sum_n [x_m, p_n] p_n + \sum_n p_n [x_m, p_n] \\ &= i\hbar \sum_n \delta_{m,n} p_n + i\hbar \sum_n p_n \delta_{m,n} \\ &= 2i\hbar p_m\end{aligned}$$

であるから

$$\boldsymbol{p} = -\frac{im}{\hbar}\left[\boldsymbol{r}, \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + v(\boldsymbol{r})\right] = -\frac{im}{\hbar}[\boldsymbol{r}, H_e] \tag{6・28}$$

と表すことができる．$H_e$ は輻射場との相互作用がないときの原子内の軌道電子のハミルトニアンである．状態 $i$, $f$ は，それぞれ固有値 $E_i$, $E_f$ をもつ演算子 $H_e$ の固有状態である．このことと，(6・28) より

$$\begin{aligned}\langle f|\boldsymbol{p}|i\rangle &= -\frac{im}{\hbar}\langle f|[\boldsymbol{r}, H_e]|i\rangle \\ &= -\frac{im}{\hbar}(E_i - E_f)\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle \end{aligned} \tag{6・29}$$

が得られる．

原子から光が自然放出される場合の遷移確率は，(6・15) に (6・29) を代入して

$$w=\frac{e^2\omega_k{}^3}{2\pi c^3\hbar}|\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{r}_{fi}|^2d\Omega \tag{6・30}$$

となる．ここで $\boldsymbol{r}_{fi}=\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle$，$E_i-E_f=\hbar\omega_k$ を用いた．(6・30) の中に現れる $e\boldsymbol{r}_{fi}$ という項は，$\psi_i\to\psi_f$ の遷移に付随する**電気的双極子能率** (electric dipole moment) の行列要素である．この意味で，行列要素 $\boldsymbol{r}_{fi}$ によって引き起こされる光の放出を**電気的双極輻射** (electric dipole radiation) と呼び，通常 $E1$ の記号で表す．終状態における光子の偏りを観測しない場合には，偏りについて和をとらなければならない．そのために，互いに直交する3つの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\lambda(\lambda=1,2,3)$ を考え，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して成り立つ

$$\boldsymbol{A}^2=A_1{}^2+A_2{}^2+A_3{}^2=\sum_{\lambda=1}^{3}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\lambda)^2 \tag{6・31}$$

の関係を使う．互いに直交する単位ベクトル ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$) として ($\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(2)}$, $\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$) を選び，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_{fi}$ とおくと

$$\sum_{\lambda=1,2}|\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{r}_{fi}|^2+\frac{1}{k^2}|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{fi}|^2=|\boldsymbol{r}_{fi}|^2 \tag{6・32}$$

そこで，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ (光の進行方向) と $\boldsymbol{r}_{fi}$ とのなす角を $\theta$ とすると，(6・32) より

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1,2}|\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{r}_{fi}|^2&=|\boldsymbol{r}_{fi}|^2-\frac{1}{k^2}|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{fi}|^2\\&=|\boldsymbol{r}_{fi}|^2(1-\cos^2\theta)\\&=|\boldsymbol{r}_{fi}|^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{6・33}$$

が得られる．(6・30) と (6・33) を用いると，光の偏りを指定しないときの**自然放出の確率**が得られ，次のようになる．

$$\bar{w}=\frac{e^2\omega_k{}^3}{2\pi c^3\hbar}|\boldsymbol{r}_{fi}|^2\sin^2\theta\, d\Omega \tag{6・34}$$

これは，また，双極輻射の相対的角度分布を表すものと考えることもできる．さらに，(6・34) を光子の可能なすべての方向について積分すると，**$E1$ 輻射の全遷移確率** (単位時間あたりの崩壊の確率)

$$\begin{aligned}W&=\frac{e^2\omega_k{}^3}{2\pi c^3\hbar}2\pi|\boldsymbol{r}_{fi}|^2\int_0^\pi\sin^3\theta\, d\theta\\&=\frac{4}{3}\,\frac{\alpha\omega_k{}^3}{c^2}|\boldsymbol{r}_{fi}|^2\end{aligned} \tag{6・35}$$

が求まる．ここで，$\alpha=e^2/c\hbar$ は前述の微細構造定数で，約1/137である．

光子は $\hbar\omega_k$ のエネルギーをもっているから，この遷移で放出されるエネルギーは

$$S=\frac{4}{3}\frac{e^2\omega_k{}^4}{c^3}|\boldsymbol{r}_{fi}|^2 \tag{6・36}$$

で与えられる．これは，古典電磁気学から導かれた振動数 $\omega_k$ で振動している電気的双極子から，単位時間に放出されるエネルギーの式と比較すると，双極子モーメント $\boldsymbol{d}=e\boldsymbol{r}$ を $2e\boldsymbol{r}_{fi}$ でおきかえたことに相当する．

原子による光の**誘導放出の確率**は存在する光子の数 $n_{\boldsymbol{k},\lambda}$ に比例するもので，(6・15) より

$$w_{\text{誘導放出}}=\frac{e^2\omega_k}{2\pi m^2c^3\hbar}n_{\boldsymbol{k},\lambda}|\langle f|e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle|^2d\Omega$$
$$=n_{\boldsymbol{k},\lambda}w_{\text{自然放出}} \tag{6・37}$$

で与えられるから，(6・35) の結果により，誘導放出の全遷移確率は

$$W_{\text{誘導放出}}=\frac{4}{3}\frac{\alpha\omega_k{}^3}{c^2}n_{\boldsymbol{k},\lambda}|\boldsymbol{r}_{fi}|^2 \tag{6・38}$$

となるが，これはまた (6・20) により，原子による光の吸収の全遷移確率に等しい．これに $\hbar\omega_k$ を掛けたものが，単位時間に吸収される輻射エネルギーである．

## 6・3　電気的双極輻射に対する選択則

電気的双極子による輻射の確率は前の節で求められたが，実際には原子のどのような状態の間で $E1$ 遷移が起こるのかをここで考えてみよう．遷移確率は (6・35)，(6・38) からわかるように，$|\boldsymbol{r}_{fi}|^2$ に比例するから，$\boldsymbol{r}_{fi}\neq0$ でなければならない．まず考えられることは，**角運動量保存則による選択則** (selection rule) である．すなわち，原子の状態について角運動量の大きさおよびその1つの成分が保存量になっている場合には，$E1$ 遷移の起こる2つの状態の角運動量は，勝手な値をとることができないということである．

原子内電子は中心力場からの力だけを受けるものとすると，その波動関数は

$$\psi_{nlm}=R_{n,l}(r)\,Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{6・39}$$

と書ける．ここで $R_{n,l}(r)$ は $r$ のみの関数，$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ は球面調和関数である．次に，遷移を引き起こしている摂動項 $H_1$($x, y, z$ の関数) と定常状態の指定に

用いられている量子数$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$に対応する演算子（$\boldsymbol{l}^2$と$l_z$）との交換関係を調べる．第1に，放出または吸収される光の偏りが$z$軸を含む平面的にある場合を考える．軌道角運動量$\boldsymbol{l}$は

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{6·40}$$

と定義されているから，$l_z$は

$$l_z=xp_y-yp_x \tag{6·41}$$

で与えられる．交換関係 $[x_i, p_j]=i\hbar\delta_{i,j}$ を用いると

$$\left.\begin{aligned}[l_z, x]&=[xp_y, x]-[yp_x, x]\\&=i\hbar y\\ [l_z, y]&=[xp_y, y]=-i\hbar x\\ [l_z, z]&=0\end{aligned}\right\} \tag{6·42}$$

を得る．ここで$l_z$が対角化されている表示

$$(l_z)_{fi}\equiv m_i\hbar\delta_{f,i}$$

をとれば，(6·42) の最後の式の行列要素は

$$\begin{aligned}(l_zz)_{fi}-(zl_z)_{fi}&=(m_fz_{fi}-z_{fi}m_i)\hbar\\&=0\end{aligned}$$

となり，$(m_f-m_i)z_{fi}=0$. したがって，$m_f=m_i$でない限り$z_{fi}=0$. すなわち，$z$軸を含む平面内に偏りをもつ光が放出されたり吸収されたりする場合，$\int\psi_{n'l'm'}{}^*z\psi_{nlm}d\boldsymbol{r}=z_{fi}\neq0$となり得るのは$m_f=m_i$のときである．許される量子数の値の変化を$\Delta$で表すと，このことは次のように書ける．

$$\Delta m=m_f-m_i=0 \tag{6·43}$$

次に，偏りが$x$成分をもつ場合を考えよう．(6·42) の第2式 $[l_z, y]=-i\hbar x$ の$y$に，第1式の$y=-(i/\hbar)[l_z, x]$ を代入して，$x$と$l_z$だけを含む交換関係に書き直すと

$$\begin{aligned}\left[l_z, -\frac{i}{\hbar}[l_z, x]\right]&=-\frac{i}{\hbar}[l_z(l_zx-xl_z)-(l_zx-xl_z)l_z]\\&=-i\hbar x\end{aligned}$$

ゆえに

$$[l_z, [l_z, x]]=l_z{}^2x-2l_zxl_z+xl_z{}^2=\hbar^2x \tag{6·44}$$

$l_z$を対角化する表示でのこの式の行列要素は

$$\hbar^2[(m_f)^2x_{fi}-2m_fx_{fi}m_i+x_{fi}(m_i)^2]=\hbar^2x_{fi}$$

あるいは

$$[(m_f-m_i)^2-1]x_{fi}=0$$

したがって，$(m_f-m_i)^2-1=0$ という条件が成立しない限り，$x_{fi}=0$ である．この条件は $m_f-m_i=\pm1$ と同値である．すなわち，偏りが $x$ 方向の光の放出，吸収を伴う $E1$ 遷移に対する選択則は

$$\Delta m=\pm1 \qquad (6\cdot45)$$

である．$y$ 方向のときも (6·45) と同じ結果が得られる．

$l$ についての選択則を求めるために，$x$, $y$, $z$ と $\boldsymbol{l}^2$ との間の交換関係を求める．それには，(6·45) を導いたときのように，2重の交換子 $[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]]$ から $[\boldsymbol{l}^2, x]$ と $[\boldsymbol{l}^2, y]$ を使って，$x, y$ を消去して $\boldsymbol{l}^2$ と $z$ だけで書けるようにすればよい．それで，まず，$\boldsymbol{l}^2$ と $x, y, z$ との交換関係が必要になるが，$x, y, z$ の中のいずれか1つについて計算すれば，他は対称性を用いて書き下すことができる．ここでは，$\boldsymbol{l}^2$ と $z$ についての交換関係を求めてみよう．

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{l}^2, z]&=[l_x{}^2, z]+[l_y{}^2, z]+[l_z{}^2, z]\\ &=l_x[l_x, z]+[l_x, z]l_x+l_y[l_y, z]+[l_y, z]l_y\\ &\quad+l_z[l_z, z]+[l_z, z]l_z \qquad (6\cdot46)\end{aligned}$$

(6·42) の第1，第2式を，おのおの，$x, y, z$ の順送りに書きかえると

$$[l_y, z]=i\hbar x, \qquad [l_x, y]=i\hbar z \qquad (6\cdot47)$$

および

$$[l_x, z]=-i\hbar y, \qquad [l_y, x]=-i\hbar z \qquad (6\cdot48)$$

が得られる．(6·46) は (6·42) の第3式および (6·47)，(6·48) を代入することにより次のように書きかえられる．そして後での都合上，3種類の方法で答を書き表しておこう．

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{l}^2, z]&=-i\hbar(l_xy+yl_x)+i\hbar(l_yx+xl_y)\\ &=-i\hbar(i\hbar z+2yl_x)+i\hbar(i\hbar z+2l_yx)\\ &=-2i\hbar(yl_x-l_yx) \qquad (6\cdot49a)\\ &=-2i\hbar(l_xy-xl_y) \qquad (6\cdot49b)\\ &=-2i\hbar(yl_x-xl_y+i\hbar z) \qquad (6\cdot49c)\end{aligned}$$

$[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]]$ から $x, y$ を消去するのに，$[\boldsymbol{l}^2, x]$，$[\boldsymbol{l}^2, y]$，$[\boldsymbol{l}^2, z]$ として，上式

$(6\cdot 49a, b, c)$ にそれぞれ対応した次の形を用いる．

$$\left.\begin{aligned}[\boldsymbol{l}^2, x] &= -2i\hbar(zl_y - l_z y) \\ [\boldsymbol{l}^2, y] &= -2i\hbar(l_z x - zl_x) \\ [\boldsymbol{l}^2, z] &= -2i\hbar(yl_x - xl_y + i\hbar z)\end{aligned}\right\} \tag{6·50}$$

これらの式もまた $x$, $y$, $z$ の順送り書きかえで $(6\cdot 49)$ から導かれる．

$(6\cdot 50)$ を使って $[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]]$ を展開していく．

$$[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]] = -2i\hbar[\boldsymbol{l}^2, yl_x - xl_y + i\hbar z] \tag{6·51}$$

$\boldsymbol{l}^2$ と $l_x$, $l_y$, $l_z$ は可換であるから，$(6\cdot 50)$ より

$$[\boldsymbol{l}^2, yl_x] = [\boldsymbol{l}^2, y]l_x = -2i\hbar(l_z x - zl_x)l_x$$

$$[\boldsymbol{l}^2, xl_y] = [\boldsymbol{l}^2, x]l_y = -2i\hbar(zl_y - l_z y)l_y$$

これらを $(6\cdot 51)$ に代入し，$-4\hbar^2 l_z z l_z = -4\hbar^2 z l_z{}^2$ を加減すると

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]] &= -2i\hbar[\boldsymbol{l}^2, y]l_x + 2i\hbar[\boldsymbol{l}^2, x]l_y + 2\hbar^2[\boldsymbol{l}^2, z] \\ &= -4\hbar^2(l_z x - zl_x)l_x + 4\hbar^2(zl_y - l_z y)l_y + 2\hbar^2(\boldsymbol{l}^2 z - z\boldsymbol{l}^2) \\ &= -4\hbar^2 l_z(xl_x + yl_y + zl_z) + 4\hbar^2 z(l_x{}^2 + l_y{}^2 + l_z{}^2) \\ &\quad + 2\hbar^2(\boldsymbol{l}^2 z - z\boldsymbol{l}^2)\end{aligned}$$

ところが

$$xl_x + yl_y + zl_z = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = 0$$

であるから，次の結果が得られる．

$$[\boldsymbol{l}^2, [\boldsymbol{l}^2, z]] = 2\hbar^2(z\boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{l}^2 z)$$

したがって

$$\boldsymbol{l}^2(\boldsymbol{l}^2 z - z\boldsymbol{l}^2) - (\boldsymbol{l}^2 z - z\boldsymbol{l}^2)\boldsymbol{l}^2 = 2\hbar^2(z\boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{l}^2 z)$$

すなわち

$$\boldsymbol{l}^4 z - 2\boldsymbol{l}^2 z\boldsymbol{l}^2 + z\boldsymbol{l}^4 - 2\hbar^2(z\boldsymbol{l}^2 + \boldsymbol{l}^2 z) = 0 \tag{6·52}$$

ここで $\boldsymbol{l}^2$ が対角化されている表示で，$(6\cdot 52)$ の $(fi)$ 行列要素を作ってみる．その際 $\boldsymbol{l}^2$ の対角要素は $l_f(l_f+1)\hbar^2$ および $l_i(l_i+1)\hbar^2$ になることを考慮すると

$$\begin{aligned}\hbar^4[l_f{}^2(l_f+1)^2 - 2l_f l_i(l_f+1)(l_i+1) + l_i{}^2(l_i+1)^2 - 2l_i(l_i+1) \\ -2l_f(l_f+1)]z_{fi} = 0\end{aligned} \tag{6·53}$$

$z_{fi} \neq 0$ であるためには，[ ] の中が零でなければならない．

$$\begin{aligned}&l_f{}^2(l_f+1)^2 - 2l_f l_i(l_f+1)(l_i+1) + l_i{}^2(l_i+1)^2 - 2l_i(l_i+1) - 2l_f(l_f+1) \\ &= 0\end{aligned} \tag{6·54}$$

始めの3項は

$$l_f^2(l_f+1)^2-2l_fl_i(l_f+1)(l_i+1)+l_i^2(l_i+1)^2$$
$$=[l_f(l_f+1)-l_i(l_i+1)]^2=(l_f-l_i)^2(l_f+l_i+1)^2$$

残りの2項は

$$2l_f(l_f+1)+2l_i(l_i+1)=(l_f+l_i+1)^2+(l_f-l_i)^2-1$$

であるから，(6·54) は

$$(l_f-l_i)^2(l_f+l_i+1)^2-(l_f+l_i+1)^2-(l_f-l_i)^2+1=0$$

となり，結果として

$$[(l_f+l_i+1)^2-1][(l_f-l_i)^2-1]=0$$

そこで

$$(l_f+l_i+1)^2-1=0$$

または

$$(l_f-l_i)^2-1=0$$

のいずれかが成り立たなければならない．ゆえに

$$\left.\begin{array}{l} l_f+l_i=0 \\ l_f+l_i+2=0 \\ l_f-l_i+1=0 \\ l_f-l_i-1=0 \end{array}\right\} \tag{6·55}$$

の4つの場合が考えられる．ところが $l\geq 0$ であるから，$l_i\geq 0$，$l_f\geq 0$ で $l_f+l_i+2\neq 0$．また，第1の条件は $l_i=l_f=0$ 以外は成り立たない．この場合には $m_i$ も $m_f$ も零となり，$(m_f-m_i)^2-1\neq 0$．ゆえに $x_{fi}=0$．同様にして $y_{fi}=0$ となる．中心力場においては $x_{fi}=y_{fi}=z_{fi}$ であるから，$z$ の行列要素も零になる．したがって，最後の2つの条件が選択則として残される．すなわち

$$\Delta l=l_f-l_i=\pm 1 \tag{6·56}$$

なお電子のスピン $\boldsymbol{s}$ を考慮に入れるならば，全角運動量 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$ の量子数 $j$ が定常状態の指定に用いられるから，選択則としては

$$\Delta j=j_f-j_i=0,\ \pm 1 \tag{6·57}$$

でなければならない．ただし $j$ を多電子系の全角運動量と考えるときは $0\to 0$ を除く．

さらに円偏光の放出，吸収に対する双極近似での選択則を考える．$z$ 方向に伝

播する円偏光の放出，吸収による遷移行列要素に現れる $\langle f|e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_k{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle$ は，§2·5 の議論により，$\langle f|e^{\pm ikz}p_x|i\rangle$ と $e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\langle f|e^{\pm ikz}p_y|i\rangle=\pm i\langle f|e^{\pm ikz}p_y|i\rangle$ である．(ここで $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ は光の放出，$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ は吸収に対応する．) 双極子近似では，これらは $-im\omega_k\langle f|x|i\rangle$，$\pm m\omega_k\langle f|y|i\rangle$ $(\omega_k=(E_i-E_f)/\hbar)$ となるから，円偏光の放出，吸収過程に対する遷移行列要素の導出は，双極子近似で $\langle f|x\pm iy|i\rangle$ を求めることに還元できる．したがって，この過程に対する選択則も容易に求めることができる．$l_z$ と $x, y$ との交換関係 (6·42) を使うと

$$[l_z, x+iy]=i\hbar(y-ix)=\hbar(x+iy)$$

したがって

$$l_z(x+iy)-(x+iy)l_z=\hbar(x+iy)$$

ここで今までと同様に $fi$ 行列要素を作れば

$$\hbar[m_f(x+iy)_{fi}-(x+iy)_{fi}m_i]=\hbar(x+iy)_{fi}$$

ゆえに，$m_f-m_i-1=0$ すなわち $\Delta m=1$ でなければ，$(x+iy)_{fi}=0$. 同様に，$\Delta m=-1$ でなければ $(x-iy)_{fi}=0$ となる．(6·19) の結果からわかるように，伝播方向が同じで，同じ状態の円偏光では，放出過程の行列要素は吸収過程の行列要素の複素共役量になっている．この事実と，上述の $\Delta m=\pm1$ の結果を結びつけると，次のような形にまとめられる．

(1) $+z$ 方向に進む右回り円偏光の輻射は $m_f=m_i+1$ の遷移過程によって吸収され，$m_f=m_i-1$ の場合に放出される．

(2) $+z$ 方向に進む左回り円偏光の輻射は $m_f=m_i-1$ の遷移過程によって吸収され，$m_f=m_i+1$ のとき放出される．

これらの結果は，原子と円偏光輻射場との間で角運動量の $z$ 成分のやりとりが行なわれるが，系全体としては角運動量の $z$ 成分の和が保存されることを表している．このことを**磁気量子数の保存**という．

最後に，空間反転に対する偶奇性，すなわち，パリティ (parity) の選択則を導こう．いま，空間反転の演算子を $P$ で表すと，ベクトル $\boldsymbol{r}$ は空間反転によって符号を変える．

$$P\boldsymbol{r}P^{-1}=-\boldsymbol{r} \tag{6·58}$$

中心力場においては，$\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ に対して力の場のポテンシャル $v$ は $v(\boldsymbol{r})=v(-\boldsymbol{r})$ である．そこで，$P$ はハミルトニアン $H_e$ ((6·8) 参照) と可換である．また，

軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とも可換である．

$$PH_eP^{-1}=H_e,\ \ P\boldsymbol{l}P^{-1}=\boldsymbol{l}$$

$H_e$ の固有関数の 1 つ $\psi_i(\boldsymbol{r})$ は，この演算子によって

$$P\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_i(-\boldsymbol{r})=\pi_i\psi_i(\boldsymbol{r})$$

に変わる．$\psi_i$ は

$$P\psi_i(\boldsymbol{r})=\pi_i\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{6·59}$$

という固有値問題の固有関数になっている．これにさらに $P$ を作用させると，$P^2:\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}$ であるから

$$P^2\psi_i(\boldsymbol{r})=\psi_i(\boldsymbol{r})=\pi_i{}^2\psi_i(\boldsymbol{r}) \tag{6·60}$$

となり，$\pi_i=\pm1$ であることがわかる．$\pi_i=1$ のとき**偶パリティ**，$\pi_i=-1$ のとき**奇パリティ**であるという．

(6·58) を用いると，$\boldsymbol{r}$ の行列要素は

$$\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle=\langle f|P^{-1}(P\boldsymbol{r}P^{-1})P|i\rangle=-\pi_f\pi_i\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle$$

となる．$\pi_f$, $\pi_i$ は原子の状態 $i$, $f$ のパリティ（偶奇性）を意味する．このことから，$\langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle\neq0$ であるためには

$$\pi_f\pi_i=-1 \tag{6·61}$$

すなわち，$\pi_i=1$, $\pi_f=-1$ か，または $\pi_i=-1$, $\pi_f=1$ でなければならない．いいかえると，遷移は偶→奇，または奇→偶の状態の間でのみ可能である．これは**ラポルテ** (Laporte) **の法則**と呼ばれている．(6·61) が $E1$ 遷移に対する**パリティの選択則**である．

以上双極輻射についてのみ述べたが，(6·27) の指数関数の展開で，$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ の高次の項を考慮すると，多重極輻射 (multipole radiation) が得られる．これについては，後でとり扱う．

## 6·4　電子による光の散乱

輻射場が物質と相互作用する例として，§6·1 で光の放出と吸収について論じたが，今度は，光が電子によって散乱される現象を考えることにしよう．この場合には，電子が状態 $i$ から状態 $f$ に遷移すると共に，光子も波数ベクトル，偏りが $(\boldsymbol{k},\lambda)$ から $(\boldsymbol{k}',\lambda')$ に変わる．したがって，系の始状態，終状態はそれぞれ

［電子 $i$，光子 $(\boldsymbol{k},\lambda)$］の状態

［電子 $f$，光子 $(\boldsymbol{k}',\lambda')$］の状態

であって，これは $(\boldsymbol{k},\ \lambda)$ の光子が1個消滅して，$(\boldsymbol{k}',\ \lambda')$ の光子が1個生成される過程にあたる．輻射場と電子の相互作用は (6·6)，(6·7) によって与えられている．そのうち，相互作用ハミルトニアン $H_1$ は光子を1個だけ増減する演算子を含んでいるので，1次の摂動では散乱に寄与しない．すなわち，電子と光子の系の始状態を $|i;\boldsymbol{k},\lambda\rangle$，終状態を $|f;\boldsymbol{k}',\lambda'\rangle$ と書くことにすると

$$\langle f;\boldsymbol{k}',\lambda'|H_1|i;\boldsymbol{k},\lambda\rangle=0$$

光の散乱には，摂動の2次ではじめて効いてくる．

2次の摂動での遷移行列要素は，$H_1$ によるものとして

$$\sum_n \frac{\langle f;\boldsymbol{k}',\lambda'|H_1|n\rangle\langle n|H_1|i;\boldsymbol{k},\lambda\rangle}{E_i-E_n} \tag{6·62}$$

がある．ここで，$\boldsymbol{n}$ は中間状態，$E_i$ は始状態の系のエネルギー，$E_n$ は中間状態の系のエネルギーである．中間状態としては，次の2つの可能な状態がある．

1.　入射光子 $(\boldsymbol{k},\ \lambda)$ がいったん始状態 $\boldsymbol{i}$ の電子に吸収され，その後再び中間状態にある電子から，散乱光子 $(\boldsymbol{k}',\lambda')$ として放出され，電子は終状態 $f$ になる．

2.　始状態 $\boldsymbol{i}$ の電子がまず光子 $(\boldsymbol{k}',\ \lambda')$ を放出し，中間状態にある電子が入射光子 $(\boldsymbol{k},\lambda)$ を吸収して，終状態 $f$ になる．

このほかに，$H_2$ による摂動の1次の寄与 $\langle f;\ \boldsymbol{k}',\ \lambda'|H_2|i;\boldsymbol{k},\lambda\rangle$ がある．これらの遷移振幅に対応する過程を視覚的に表現したものに**ファインマン図形** (Feynman diagram) がある．上の3つの遷移行列要素に対する図形は図6·2のようになる．図6·2の（i）は (6·62) で与えられた $H_1$ からの2次の摂動の寄与のうち，中間状態1のものに対応し，（ii）は中間状態2の場合に対応する．（iii）は $H_2$ による散乱の様子を示している．このように，遷移行列要素の異なった部分を，異なった図形に対応させることができる．さらに，この対応は高次の摂動の計算にも拡張することができる．このような図形をファインマン図形という．

図6·2の3つの図はいずれも電荷 $e$ の次数としては2次であるから，$e$ につ

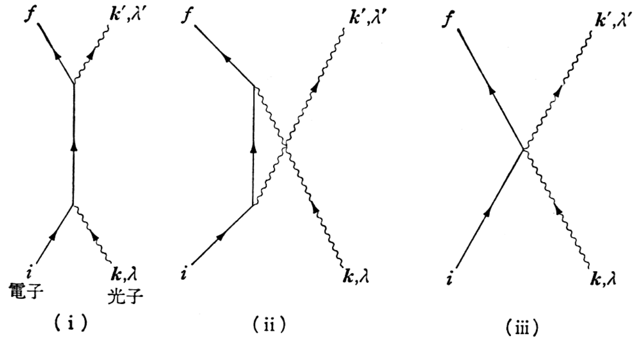



図 6·2 電子による光の散乱

いて2次の摂動といえる．しかし，入射光子のエネルギーが電子の束縛エネルギー (binding energy) よりも十分大きく，しかも，電子の静止エネルギー $mc^2$ にくらべて十分小さいときには，$H_2$ による散乱が主に効き，$H_1$ による散乱（i），（ii）は無視できることが，実際計算を実行することによって示される．そこで，議論を簡単にするため，以下では（iii）に対応する散乱のみをとり扱うことにする．

$H_2$ の行列要素のうち，散乱に相当する行列要素を与えるのは $a_{k',\lambda'}{}^\dagger a_{k,\lambda}$，$a_{k,\lambda}\, a_{k',\lambda'}{}^\dagger$ を含む項であるから，(5·16)，(5·17) と (6·7) より

$$\begin{aligned}\langle f; \boldsymbol{k}', \lambda' | H_2 | i; \boldsymbol{k}, \lambda\rangle &= \frac{e^2}{2m}\frac{1}{L^3}\frac{h}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})\\ &\quad\times\langle f; \boldsymbol{k}', \lambda' | (a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^\dagger a_{\boldsymbol{k},\lambda} + a_{\boldsymbol{k},\lambda} a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^\dagger) e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} | i; \boldsymbol{k}, \lambda\rangle\\ &= \frac{e^2}{m}\frac{1}{L^3}\frac{h}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})\langle f | e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}} | i\rangle \qquad (6\cdot 63)\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の式を導く際に，$\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}'$ とした．ここで，光の波長が十分長く，電子がほとんど静止していると考えられるときには，$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，$e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}$ は1で近似してよい．この近似がよいことは，双極近似として前節で述べたとおりである．したがって，入射光子のエネルギーが電子の静止エネルギー $mc^2$ より十分に小さいならば，(6·63) の行列要素は

$$\langle f; \boldsymbol{k}', \lambda' | H_2 | i; \boldsymbol{k}, \lambda\rangle = \frac{e^2}{m}\frac{1}{L^3}\frac{h}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda')})\delta_{f,i} \qquad (6\cdot 64)$$

と近似できる．(6·64) は，散乱の前後で電子の状態が変化しないことを示している．それゆえ，入射光子のエネルギーと散乱光子のエネルギーとは全く等しくなければならない．すなわち，$\omega_k=\omega_{k'}$ である．

単位時間に立体角 $d\Omega$ 内に光子が散乱される確率は，(6·15) を導き出すのと全く同様な方法で導くことができる．

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle f;\boldsymbol{k}',\lambda'|H_2|i;\boldsymbol{k},\lambda\rangle|^2\frac{L^3}{(2\pi)^3}\frac{k'^2}{c\hbar}d\Omega \tag{6·65}$$

これは，もちろん，入射，散乱光とも偏りが指定されている場合の確率である．(6·64) を (6·65) に代入し，$\omega_k=\omega_{k'}$ に注意すると

$$w=\frac{e^4}{m^2c^3}\frac{1}{L^3}|(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})\delta_{f,i}|^2d\Omega \tag{6·66}$$

が得られる．

ところで，いま，我々は一辺 $L$ の立方体で規格化して話を進めてきたので，空間における光子の密度は $1/L^3$ である．一方，光の速さは $c$ であるから，単位時間に単位面積を通過する光子の数(flux)は $c/L^3$ である．したがって，単位面積あたり 1 個の光子が入射するとき，立体角 $d\Omega$ 内に散乱される光子の数，すなわち，散乱微分断面積は，(6·66) の確率を flux で割ることによって得られる．

$$d\sigma=\frac{e^4}{m^2c^4}|(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})|^2d\Omega \tag{6·67}$$

ただし，散乱の前後で電子の状態は変化しない．このような散乱は**トムソン散乱** (Thomson scattering) と呼ばれる．Thomson 散乱では，光子のエネルギーは散乱の前後で等しく，したがって，散乱光は入射光につながった波 (coherent wave) である．また，散乱断面積は光子のエネルギーによらず一定である．散乱光の偏りを観測しないときには，散乱光の偏りについて和をとらねばならない．そのために，互いに直交する 3 つの単位ベクトル ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(1)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(2)}$, $\boldsymbol{k}'/|\boldsymbol{k}'|$) を考え，(6·31) において $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}$ とおくと

$$\sum_{\lambda'=1,2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})^2+\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k}')^2=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})^2=1$$

となるから

$$\sum_{\lambda'=1,2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})^2=1-\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{k}')^2}{k'^2}=1-\cos^2\Theta=\sin^2\Theta \tag{6·68}$$

が得られる．$\Theta$ は入射光子の偏りと，光子の散乱方向とのなす角である（図 6·3 参照）．偏光した入射光が散乱され，散乱光の偏りが観測されない場合の散乱微分断面積は（6·67）と（6·68）から容易に導かれる．

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=r_0{}^2\sin^2\Theta \qquad (6\cdot 69)$$

ここで，$r_0$ は**古典電子半径**（classical electron radius）と呼ばれるもので

$$r_0=\frac{e^2}{mc^2}=2.82\times 10^{-13}\text{cm} \qquad (6\cdot 70)$$

で与えられる．

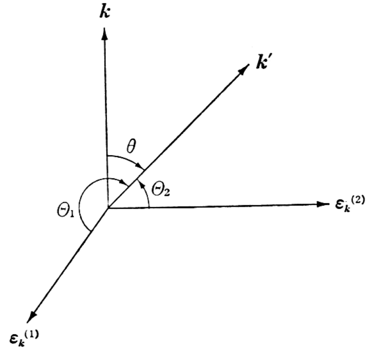



図 6·3

偏りのない入射光が散乱される場合には，始状態の光の偏りについて平均する必要がある．入射光の偏り，$\lambda=1, 2$ と光子の散乱方向とのなす角を，それぞれ $\Theta_1$ と $\Theta_2$ と名づけると，（6·69）により，微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{unpol}}=\frac{1}{2}r_0{}^2(\sin^2\Theta_1+\sin^2\Theta_2) \qquad (6\cdot 71)$$

と表すことができる．図 6·3 に示されるように，互いに直交する単位ベクトルとして（$\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(1)}$，$\boldsymbol{\varepsilon_k}^{(2)}$，$\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$）をとると，散乱光 $\boldsymbol{k}'$ のこの座標系に対する方向余弦は

$$\cos^2\theta+\cos^2\Theta_1+\cos^2\Theta_2=1$$

である．ここに $\theta$ は入射光と散乱光の方向のなす角を表す．したがって散乱断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{unpol}}=\frac{1}{2}r_0{}^2(1+\cos^2\theta) \qquad (6\cdot 72)$$

である．（6·72）はトムソン（J. J. Thomson）が最初に古典的に導いた **Thomson の公式**と一致する．全散乱断面積は（6·72）を積分することによって

$$\sigma_{\text{tot}}=r_0{}^2\int\frac{1+\cos^2\theta}{2}d\Omega=\frac{8\pi}{3}r_0{}^2 \qquad (6\cdot 73)$$

となる．この全散乱断面積の数値は，（6·70）を（6·73）に代入することによ

り

$$\sigma_{\text{tot}}=6.65\times10^{-25}\,\text{cm}^2 \tag{6·74}$$

で与えられる.

## 6·5 多重極遷移

すでに述べたとおり，**電気的双極遷移**においては，角運動量の保存則，空間反転に対する偶奇性，すなわち，パリティの保存則によって，$\boldsymbol{r}$ の行列要素が零になって，遷移が禁止されることがある．このように，軌道電子の波動関数の対称性から，$E1$ 遷移が禁止される場合には，さらに高次の**多重極遷移**が重要になる．そこで，$E1$ 遷移より1つ次数の高い**電気的4重極遷移** (electric quadrupole transition) と**磁気的双極遷移** (magnetic dipole transition) について簡単にふれておこう．

原子による光の放出と吸収の遷移確率を求めることは，(6·10)，(6·16) より明らかなように，行列要素 $\langle f|e^{\mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle$ を求めることに帰着された．この行列要素の中に現れている $e^{\mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の展開 (6·27) の第1項をとったものが $E1$ 遷移を与えることは，すでに§6·2で述べた．展開の第1項をとったものが零になったとしても，展開の第2項からの遷移行列要素への寄与を考えれば，それは次のような積分になる．

$$\langle f|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle=\sum_{m,n=1}^{3}k_m(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_n\langle f|x_m p_n|i\rangle \tag{6·75}$$

これは，3次元空間におけるテンソル $x_m p_n$ の行列要素を求める問題である．$i$, $f$ は今までと同じく，軌道電子の2つの状態を表す．ここで，テンソル $x_m p_n$ をトレース0の対称テンソル，反対称テンソルとスカラーの3つの既約テンソルに分解する．

$$x_m p_n=\frac{1}{2}\left[x_m p_n+x_n p_m-\frac{2}{3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\delta_{m,n}\right]+\frac{1}{2}(x_m p_n-x_n p_m)$$
$$+\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\delta_{m,n} \tag{6·76}$$

回転群の知識を用いるならば，(6·76) の右辺の第1，2，3項はそれぞれ，3次元純粋回転に対して，$\mathscr{D}^{(2)}$，$\mathscr{D}^{(1)}$，$\mathscr{D}^{(0)}$ に従って変換される．この事実を知っていれば，ただちに角運動量に対する選択則を導くことができるが，ここで

は，もう少し具体的に各項を検討してみよう．

まず，第3項のスカラー部分から始めよう．(6·75) より，この部分からの寄与は

$$\sum_{m,n} k_m (\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_n \langle f | (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\delta_{m,n} | \boldsymbol{i} \rangle = (\boldsymbol{k}\cdot\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}) \langle f | (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}) | \boldsymbol{i} \rangle \qquad (6\cdot77)$$

と表される．ここで光の横波の条件 $(\boldsymbol{k}\cdot\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})=0$ を考慮すると，(6·77) は零となるから，スカラー部分は輻射に全く効かないことがわかる．

次に，(6·76) の右辺第1項の対称テンソルについて調べてみよう．§6·2の電気的双極子の場合の議論にならって，運動量演算子 $\boldsymbol{p}$ を位置 $\boldsymbol{r}$ とハミルトニアン $H_e$ との交換関係 (6·28) を使って表すと，対称テンソルは

$$x_m p_n + x_n p_m - \frac{2}{3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\delta_{m,n} = \frac{im}{\hbar}[H_e, T_{mn}] \qquad (6\cdot78)$$

$$T_{mn} = x_m x_n - \frac{1}{3} r^2 \delta_{m,n} \qquad (6\cdot79)$$

と書くことができる．$H_e$ は電子と輻射場との相互作用がないときの軌道電子のハミルトニアン (6·8) である．状態 $\boldsymbol{i}$, $f$ はハミルトニアン $H_e$ の固有状態であるから，対称テンソルの遷移行列要素は (6·78) から

$$\left\langle f \middle| \left[ x_m p_n + x_n p_m - \frac{2}{3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\delta_{m,n} \right] \middle| \boldsymbol{i} \right\rangle = \frac{im}{\hbar} \langle f | [H_e, T_{m,n}] | \boldsymbol{i} \rangle$$

$$= \frac{im}{\hbar}(E_f - E_i) \langle f | T_{mn} | \boldsymbol{i} \rangle \quad (6\cdot80)$$

となる．対称テンソル $T_{mn}$ の実際の形は

$$T_{mn} = \begin{pmatrix} x^2 - \frac{1}{3}r^2 & xy & xz \\ yx & y^2 - \frac{1}{3}r^2 & yz \\ zx & zy & z^2 - \frac{1}{3}r^2 \end{pmatrix} \qquad (6\cdot81)$$

である．これは**電気的4重極子能率** (electric quadrupole moment) **テンソル**と呼ばれる．(6·81) のテンソルは，原子の電荷分布の球対称分布からのずれを表している．このことから，(6·76) の右辺の第1項の対称テンソルによって引き起こされる遷移を**電気的4重極遷移**と呼び，$E2$ と表記する．一般に，電気的 $2^L$ 重極遷移を $EL$ と表記する．$E2$ 遷移に対する軌道角運動量の選択則は

$$\Delta l=0,\ \pm 2$$

であり，全角運動量に対しては

$$\Delta j=j_f-j_i=0,\ \pm 1,\ \pm 2 \tag{6·82}$$

となる．ただし $j$ を多電子系の全角運動量と考えるときは，0→0，1→0，0→1 遷移は角運動量を保存しないから，禁止される．

最後に，(6·76) の右辺の第2項の寄与を考えてみよう．

$$\sum_{m,n} k_m(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_n\langle f|(x_m p_n - x_n p_m)|i\rangle$$
$$=(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})\langle f|(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})|i\rangle \tag{6·83}$$

(6·83) が成り立つことは次のように展開するとわかる．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) &= [k_y(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_z - k_z(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_y](yp_z - zp_y)\\
&\quad + [k_z(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_x - k_x(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_z](zp_x - xp_z)\\
&\quad + [k_x(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_y - k_y(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_x](xp_y - yp_x)\\
&= k_x(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_y(xp_y - yp_x) + k_x(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_z(xp_z - zp_x)\\
&\quad + k_y(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_z(yp_z - zp_y) + k_y(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_x(yp_x - xp_y)\\
&\quad + k_z(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_x(zp_x - xp_z) + k_z(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_y(zp_y - yp_z)\\
&= \sum_{m,n} k_m(\varepsilon_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)})_n(x_m p_n - x_n p_m)\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}$ は (2·71b) から明らかなように，磁場 $\boldsymbol{B}$ を平面波に展開したときの主要項である．一方，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は原子を構成している電子の軌道角運動量演算子であるから，(6·83) に現れる電磁相互作用は「磁場」と「軌道角運動量」との積の形をしている． 軌道角運動量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ には $(-e/2mc)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})$ の磁気的双極子能率が付随している．これは電子の軌道磁気能率の演算子である（§4·2参照）．それゆえ，(6·83) の $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ による遷移を磁気的双極遷移と呼び，通常 $M1$ の記号で表す．この遷移の原因になっているのは，古典論では，輻射場と運動している電子との間の Lorentz 力による相互作用である．磁場 $\boldsymbol{B}$ と速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電子（電荷 $-e$）との間の Lorentz 力は $-(e/c)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ となり，電気的双極遷移の原因となる静電気力 $-e\boldsymbol{E}$ にくらべると大きさの点で $v/c$ だけ小さくなっている．

$M1$ 遷移における全角運動量の変化は $E1$ 遷移の場合と全く同じで，$\Delta j=j_f-j_i=0,\ \pm 1$ となる．ただし，0→0 は禁止される．次に，パリティについて調べよう．

空間反転 $P$ に対して，位置と角運動量ベクトルはそれぞれ符号を変えるから，テンソル $x_m p_n$ は

$$Px_m p_n P^{-1} = Px_m P^{-1} P p_n P^{-1} = x_m p_n \qquad (6\cdot84)$$

となり，空間反転に対して不変である．(6·84) の両辺の行列要素をとると

$$\langle f|x_m p_n|i\rangle = \langle f|P^{-1}Px_m p_n P^{-1}P|i\rangle = \pi_f \pi_i \langle f|x_m p_n|i\rangle \qquad (6\cdot85)$$

ここで，$\pi_i$, $\pi_f$ は原子の状態 $i$, $f$ のパリティである．(6·85) から，$M1$, $E2$ 遷移が起こるためには

$$\pi_f \pi_i = 1 \qquad (6\cdot86)$$

でなければならない．すなわち，$M1$, $E2$ 遷移では，遷移の前後で原子のパリティは変わらない．

行列要素 $\langle f|e^{\mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{p})|i\rangle$ に効く積分領域が $|\boldsymbol{r}|\lesssim R$($R$ は原子の半径) であることを考慮すると，指数関数の展開 (6·27) の第 2 項による $M1$ と $E2$ 遷移行列要素の大きさは，一般に第 1 項による $E1$ の行列要素にくらべて，約 $\alpha/2$ ($\alpha$ は微細構造定数) 倍小さいことが，(6·26) からわかる．したがって，原子がある準位から $M1$ または $E2$ 輻射によってのみ，他の準位に遷移するとき，その準位の寿命は，特別の事情がない限り，$E1$ 輻射の場合より，おおよそ $10^5$ 倍長くなるといえる．(6·27) の展開において，$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ のさらに次数の高い項を考えると，高次の**多重極遷移** (multipole transition) が導かれる．多重極子の次数が 1 つ高くなると，多重極遷移の行列要素に現れる波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の次数は 1 つずつ増加する．したがって，遷移行列要素の大きさも，多重極子の次数と共に順次 $10^{-2}$～$10^{-3}$ 程度小さくなり，寿命もおおよそ $10^5$ 倍長くなる．

ここで，多重極遷移について今まで述べてきたこと，すなわち，角運動量やパリティの選択則等を表にまとめておこう．表の「角運動量の変化」の欄の $(\Delta j)_{\max}$ は，$2^L$ 重極子能率による多重極遷移において許される最大の角運動量変化の値 $L$ に等しい．$\boldsymbol{j}_i$, $\boldsymbol{j}_f$ をそれぞれ原子状態 $i$, $f$ の全角運動量とすると，遷移の前後で全角運動量は保存されるから

$$\boldsymbol{j}_f = \boldsymbol{j}_i + \boldsymbol{L} \qquad (6\cdot87)$$

が成り立つ．したがって，多重極輻射は次の条件が満たされるときに限り放出される．

$$|j_f - j_i| \leq L \leq j_f + j_i \tag{6·88}$$
$$m_f - m_i = m$$

ここで，$m_f$, $m_i$, $m$ はそれぞれ $j_f$, $j_i$, $L$ の $z$ 成分である．パリティの変化が +1 のときは，状態 $i$, $f$ のパリティは同じで，−1 のときは両者が異なることを意味する．

表 6.1　多重極遷移の選択則

| 電気的または磁気的多重極遷移 | $E1$ | $M1$ | $E2$ | $M2$ | $E3$ | $M3$ | $E4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 角運動量変化の最大値 $(\Delta j)_{\max}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| パリティの変化 $\pi_i\pi_f$ | −1 | +1 | +1 | −1 | −1 | +1 | +1 |

原子核の場合にも，励起状態からガンマ線（$\gamma$ 線，原子核から放出される光子で，通常X線よりエネルギーが高い）を放出してエネルギーの低い準位へ移る現象や，$\gamma$ 線を吸収して高いエネルギー準位に移る現象がある．前者を**ガンマ遷移**（$\gamma$ transition），後者を**原子核のフルオレスセンス・レゾナンス**（nuclear fluorescence resonance）という．これらの過程においては，双極輻射の場合の準位の半減期は，一般に $10^{-17}$ から $10^{-13}$ 秒である．4 重極輻射では，$10^{-13}$ 秒程度のものも少なくない．原子では，$E2$ 輻射の準位の寿命は，$E1$ の場合より約 $10^5$ 倍長くなっていたから，これは原子の場合と大変異なっている．しかし，エネルギーの低い $\gamma$ 線（20〜200 keV）では，寿命はもっと長く，$10^{-10}$ から $10^{-3}$ 秒くらいになる．ここで，eV とは，電子が 1 ボルト（V）の電位差を移動したときに得る運動エネルギーで，約 $1.602\times10^{-19}$ ジュール（J）である．1000 eV を 1 keV，$10^6$ eV を 1 MeV という．このように，励起状態にある原子核から $\gamma$ 線が放出される過程では，$M1$ や $E2$ 遷移が普通に観測される過程になっている．そこで，多重極遷移をとり扱う必要があるが，これには，指数関数 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ の展開（6·27）を使うよりも，指数関数を球面調和関数に展開したほうが便利である．さらに，角運動量の合成則を用いて，偏りのベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}$ と球面調和関数との積からなる**ベクトル球面調和関数**（vector spherical harmonics）と呼ばれる角運動量の固有状態を作ることができる．遷移行列要素の中に現れる平面波 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)} e^{\mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ をベクトル球面調和関数に展開してやると，多重極遷移が導かれる．$\gamma$ 線のエネルギー $E$ を MeV 単位で測って，

$E_{\mathrm{MeV}}$ と書くと，$\gamma$ 線の波長 $\lambda$ は

$$\lambda\!\!\!{}^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{197.36}{E_{\mathrm{MeV}}} \times 10^{-13}\mathrm{cm} \qquad (6\cdot 89)$$

と表される．原子核の半径を $R$ とすると，多重極展開が有効なためには

$$\frac{R}{\lambda\!\!\!{}^{-}} = kR \ll 1 \qquad (6\cdot 90)$$

でなければならない．原子核の半径 $R$ は

$$R \approx 1.2 \times 10^{-13} A^{\frac{1}{3}} \mathrm{cm} \qquad (6\cdot 91)$$

$A$：原子核の質量数

で与えられるから，これを (6·90) に代入し，(6·89) を用いると

$$E_{\mathrm{MeV}} \ll 160 A^{-\frac{1}{3}} \mathrm{MeV} \qquad (6\cdot 92)$$

となり，$A \approx 250$ でも $E_{\mathrm{MeV}} \ll 25$ MeV ならば成り立つ．

電気的 $2^L$ 重極遷移 $EL$ と磁気的 $2^L$ 重極遷移 $ML$ の強さの比は，核子の速さを $v$ とすると，$v/c$ である．不確定性原理より，$M$ を核子の質量とすると，$R \sim \hbar/Mv$ であるから，比はおよそ $\hbar/McR$ となる．

選択則は，遷移行列要素が零にならない条件から

$$\begin{aligned} &EL \quad |J_i - J_f| < L \leq J_i + J_f \quad \pi_i \pi_f = (-1)^L \\ &ML \quad |J_i - J_f| \leq L \leq J_i + J_f \quad \pi_i \pi_f = (-1)^{L+1} \end{aligned} \qquad (6\cdot 93)$$

である．ここで，$J_i$, $J_f$ はそれぞれ原子核の始状態，終状態のスピンである．光子の固有スピンは 1 だから，$L=0$ の $\gamma$ 遷移は存在しない．したがって，$J_i = J_f = 0$ の場合の $\gamma$ 遷移は禁止される．$J_i$ または $J_f$ の一方が 0 ならば，$EL$ または $ML$ のどちらか一方のみが現れる．$EL$ ならばパリティ変化は $(-1)^L$ であり，$ML$ ならば $(-1)^{L+1}$ である．$J_i = J_f = 1/2$ ならば，双極輻射だけが可能である．$E1$ ならばパリティは変化し，$M1$ ならばパリティは変化しない．$\gamma$ 線のエネルギーがあまり大きくなければ，$L = |J_i - J_f|$, $|J_i - J_f| + 1, \cdots$, $J_i + J_f$ のうち，最小の $L$ の多重極遷移が圧倒的に強く現れる．$EL$ となるか，$ML$ となるかはパリティの変化，すなわち，$\pi_i \pi_f$ の値によって決まる．$ML$ 遷移の場合，$EL$ 遷移の場合にくらべて強度はおよそ $(v/c)^2$ 倍小さくなる．原子核内では，$(v/c)^2 \sim 0.05$ である．したがって $ML$ の場合，$E(L+1)$ も同時に観測されることが多い．

## 6·6 ゼーマン効果

§6·2で導いた選択則を直接検証したものとして，**正常ゼーマン効果** (normal Zeeman effect) がある．これは，磁場の中の原子の放出するX線のスペクトルがいくつかの線に分裂する現象で，磁場が摂動として加えられたときの，原子のエネルギー準位のずれとして扱われる．1電子と輻射場との相互作用ハミルトニアンは (6·3) で与えられている．磁場が一様な静磁場の場合，$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ より $\boldsymbol{A}=(1/2)(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})$ となる．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ ならば，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{A}$ は可換である ((6·5) 参照) から，$H_I$ は

$$
\begin{aligned}
H_I&=H_1+H_2\\
&=\frac{e}{m_ec}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e^2}{2m_ec^2}\boldsymbol{A}^2\\
&=\frac{e}{2m_ec}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}+\frac{e^2}{8m_ec^2}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r})\\
&=\frac{e}{2m_ec}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{B}+\frac{e^2}{8m_ec^2}B^2\,r^2\sin^2\theta\\
&=\frac{e}{2m_ec}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B}+\frac{e^2}{8m_ec^2}B^2\,r^2\sin^2\theta
\end{aligned}
\tag{6·94}
$$

と書き表される．$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{l}$ は軌道角運動量で，$\theta$ は $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{B}$ とのなす角である．電子の電荷を $-e$ としているから，$e$ は素電荷である．また，$l_z$ の固有値 $m$ と混同しないように，ここでは電子の質量を $m_e$ と書くことにする．

$|\boldsymbol{B}|$が小さければ，$B^2$ の項を無視して

$$H_I=H_1=\frac{e}{2m_ec}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{B} \tag{6·95}$$

とおくことができる．軌道電子は中心力場のポテンシャルの中を運動しているものとすれば，(6·8) で与えられた摂動のないときのハミルトニアン $H_e$ の固有関数は $R_{n,l}(r)\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ という形をとる．磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向を $z$ 軸にとれば

$$H_1=\frac{e}{2m_ec}l_zB,\quad \boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z \tag{6·96}$$

$\boldsymbol{e}_z$ は $z$ 方向の単位ベクトル

であり

$$l_zY_{l,m}(\theta,\varphi)=m\hbar Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

であるから，$H_e$ の固有関数は，1次の摂動項 $H_1$ の固有関数になっている．そ

の固有値はすぐに求められて，$(eB/2m_ec)m\hbar$ となる．したがって，一様な磁場の中では，量子数 $l$ で指定されるエネルギー準位は $(eB/2m_ec)\hbar$ の間隔の $2l+1$ 個の準位に分裂する．すなわち，摂動がないときの原子の準位の $2l+1$ 重の縮退は完全にとり除かれ，$m$が異なった状態は異なったエネルギーをもつ．$m$が**磁気量子数**と呼ばれるのは，このためである．$e\hbar/2m_ec$ は §4·2 に現れた**Bohr 磁子**にほかならない．また，$eB/2m_ec$ は振動数のディメンションをもち，**ラーモア振動数** (Lamor frequency) と呼ばれている．Zeeman 効果に対する説明として，§6·3 の選択則の結果を用いると次のようになる．

（1） $\Delta m=m_f-m_i=\pm1$ を満たす遷移過程から生じた輻射では，輻射のエネルギーが $\mp(e\hbar/2m_ec)B$ だけずれる．これは振動数に直すと $\Delta\nu=\mp(eB/4\pi m_ec)$ である．このとき，$\langle f|z|i\rangle=0$, $\langle f|x\pm iy|i\rangle\neq0$ であるから，この輻射を磁場の方向（$z$ 方向）で観測したとき，互いに逆の回転の向きをもつ円偏光波である．§6·3 の（1），（2）より，$\Delta m=-1$ のとき放出される輻射は右円偏光，$\Delta m=1$ のとき放出される輻射は左円偏光である．$x-y$ 平面で（磁場に垂直な方向）観測したときは，磁場に垂直な平面偏光波である（$x-y$ 平面内の円運動を，たとえば$x$ 方向に沿って観測すると，$y$ 方向のみの直線運動とな

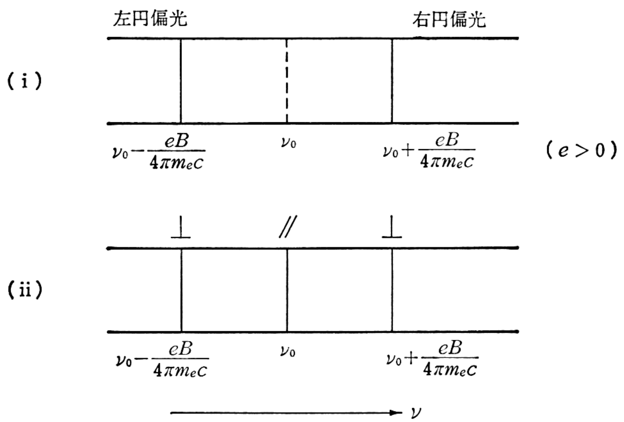



**図 6·4** （i） 磁場に平行な方向で観測したスペクトル．2本とも円偏光である．（ii） 磁場に垂直な方向で観測したスペクトル．3本とも平面偏光．$\nu_0$ は $\pi$ 成分で，磁場の方向に平面偏光，他の2本は $\sigma$ 成分で，磁場に垂直に平面偏光．

る). これらはドイツ語の senkrecht から **$\sigma$ 成分**と呼ばれている.

(2) $m$の変化がない遷移 ($\Delta m=0$) から生じた輻射は, $\langle f|z|i\rangle \neq 0$, $\langle f|x\pm iy|i\rangle=0$ であるから, 磁場の方向で観測したときは現れず, $x-y$ 平面で観測したときは, 磁場の方向に平面偏光している. これは parallel なので **$\pi$ 成分**と呼ばれている. この場合は $\Delta m=0$ なので, エネルギー, したがって振動数のずれはない. すなわち, 磁場がない場合に原子の発するスペクトル線と同じ振動数をもつ.

これを図に示すと図 6·4 のようになる.

上の議論では, 電子のスピンを無視している. 上の結果はスピン一重項においてのみ成り立つ. 正常 Zeeman 効果は, アルカリ土類金属元素で観測されている. アルカリ金属元素では, スペクトル線が 3 本ではなく, 一般に偶数本に分かれる. これは準位に対して電子のスピンの影響を考慮しなければ説明することができない. この現象は**異常 Zeeman 効果** (anomalous Zeeman effect) と呼ばれるが, ここではこれ以上議論しない.

# 7

# コンプトン散乱

この章では物質と輻射場との相互作用を含む代表的な物理的過程として，自由電子による光子の散乱，**コンプトン** (Compton) **散乱**，をとり扱う．電子の運動は相対論的であるとし，§5·2の結果を用いて最低次の摂動計算を行なうことにする．

## 7·1　コンプトン散乱のための摂動計算

始状態の状態ベクトル $|\Psi_i\rangle$ を，無摂動ハミルトニアン

$$H_0=\int\bar{\psi}(\boldsymbol{r})[\hbar c\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}+mc^2]\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}+\frac{1}{8\pi}\int[\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{r})]d\boldsymbol{r} \tag{7·1}$$

の固有状態にとり，§5·2の (5·77) の記述方法を用いて

$$|\Psi_i\rangle=|ps;\boldsymbol{k}\lambda\rangle=c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·2}$$

と書くことにする．ここで電子はスピン方向 $s$，運動量 $\boldsymbol{p}$，エネルギー $E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}$ の状態に，光子は偏り $\lambda$，運動量 $\boldsymbol{k}$，エネルギー $|\boldsymbol{k}|c$ の状態にあるものとする．同様に，終状態の状態ベクトル $|\Psi_f\rangle$ を

$$|\Psi_f\rangle=|\boldsymbol{p}'r;\boldsymbol{k}'\lambda'\rangle=c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·3}$$

とする．

電子と光子との相互作用ハミルトニアン $H_I'(t)$ は，(5·80)，(5·86) および (5·93) に与えられているように

$$H_I'(t)=e^{\frac{iH_0t}{\hbar}}H_Ie^{-\frac{iH_0t}{\hbar}} \tag{7·4}$$

$$H_I=ie\int\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\psi}(\boldsymbol{r})\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})A_\mu(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{7·5}$$

である．(ここで再び $e$ は素電荷とした．この章では一般の電荷をとり扱う必要がないので，常に $e$ は正とする．) 上の $H_I$ を電子および光子の生成，消滅演算子で表しておこう．(5·40) で与えられたベクトル・ポテンシャルを拡張して

$$A_\mu(\boldsymbol{r})=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{4}\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2c}{|\boldsymbol{k}|}}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}\left(a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{\frac{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}e^{-\frac{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}}\right) \qquad (7\cdot6)$$

とおく．ただしこの章を通して，$\boldsymbol{k}$ は波数ではなく運動量であることに注意する．光子の偏りは $\lambda=1,2,3,4$ のすべての値をとり，4個のベクトル・ポテンシャル $A_\mu(\mu=1,2,3,4)$ も独立であるように形式的に表しておくと，見かけ上共変形で計算を進めることができて便利である．4次元に拡張した**光子の偏りのベクトル** $e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}$ を次のように定義する．

$$e_{\boldsymbol{k},1}{}^{\mu}=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(1)})_\mu \qquad \mu=1,2,3 \qquad (7\cdot7a)$$
$$=0 \qquad \mu=4$$
$$e_{\boldsymbol{k},2}{}^{\mu}=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)})_\mu \qquad \mu=1,2,3 \qquad (7\cdot7b)$$
$$=0 \qquad \mu=4$$

$$e_{\boldsymbol{k},3}{}^{\mu}=-\frac{k_\mu+\eta_\mu\sum_{\nu=1}^{4}k_\nu\eta_\nu}{\sum_{\nu=1}^{4}k_\nu\eta_\nu} \qquad \mu=1,2,3,4 \qquad (7\cdot7c)$$

$$=\left(\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},0\right)$$

$$e_{\boldsymbol{k},4}{}^{\mu}=i\eta_\mu \qquad \mu=1,2,3,4 \qquad (7\cdot7d)$$
$$=(0,0,0,-1)$$

ただし

$$\eta_\mu=i\delta_{\mu,4}$$

とおく．$e_{\boldsymbol{k},1}{}^{\mu}, e_{\boldsymbol{k},2}{}^{\mu}$ は横方向の偏りのベクトル，$e_{\boldsymbol{k},3}{}^{\mu}$ は縦方向の偏りのベクトル，$e_{\boldsymbol{k},4}{}^{\mu}$ は時間方向の偏りのベクトルである．これらは次のような性質をもつ．

$$\sum_{\mu=1}^{4}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}e_{\boldsymbol{k},\lambda'}{}^{\mu}=\delta_{\lambda,\lambda'} \qquad (7\cdot8)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}=\delta_{\mu,\nu} \qquad (7\cdot9)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}=\delta_{\mu,\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{\left(\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)^2}-\frac{k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu}{\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma} \qquad (7\cdot10)$$

§2·4 で述べたように，$(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k},1},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k},2},\ \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)=(e_{\boldsymbol{k},1}{}^{\mu},\ e_{\boldsymbol{k},2}{}^{\mu},\ e_{\boldsymbol{k},3}{}^{\mu})$ は右手系を作るように選ばれており，$e_{\boldsymbol{k},4}{}^{\mu}=(0,0,0,-1)$ であるから，(7·8), (7·9) は自明である．

$$\sum_{\lambda=3}^{4} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}=e_{\boldsymbol{k},3}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},3}{}^{\nu}+e_{\boldsymbol{k},4}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},4}{}^{\nu}$$

$$=\frac{\left(k_\mu+\eta_\mu\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)\left(k_\nu+\eta_\nu\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)}{\left(\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)^2}-\eta_\mu\eta_\nu$$

$$=\frac{k_\mu k_\nu}{\left(\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)^2}+\frac{k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu}{\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma}$$

であるから

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}=\sum_{\nu=1}^{4} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}-\sum_{\lambda=3}^{4} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu} e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\nu}$$

$$=\delta_{\mu,\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{\left(\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma\right)^2}-\frac{k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu}{\sum_{\sigma=1}^{4}k_\sigma\eta_\sigma}$$

となり，(7·10) が導かれる．

生成，消滅演算子 $a_{\boldsymbol{k},\lambda}, a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}$ の交換関係は，$\lambda=1,2,3$ に対しては $a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}$ は $a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ のエルミート共役演算子であるから

$$[a_{\boldsymbol{k},\lambda},\ a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}\qquad(\lambda,\lambda'=1,2,3)$$

となるが，$a_{\boldsymbol{k},4}{}^{\dagger}$ は $a_{\boldsymbol{k},4}$ の反エルミート共役演算子である．$\phi=-iA_4$ がエルミート演算子であるから，$a_{\boldsymbol{k},4}$，$a_{\boldsymbol{k},4}{}^{\dagger}$ の代わりに $-ia_{\boldsymbol{k},4}$，$-ia_{\boldsymbol{k},4}{}^{\dagger}$ という演算子を用いると，$-ia_{\boldsymbol{k},4}{}^{\dagger}$ は $-ia_{\boldsymbol{k},4}$ のエルミート共役になるので

$$[-ia_{\boldsymbol{k},4},\ -ia_{\boldsymbol{k}',4}{}^{\dagger}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

すなわち

$$[a_{\boldsymbol{k},4},\ a_{\boldsymbol{k}',4}{}^{\dagger}]=-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$$

となる．したがって

$$\left.\begin{aligned}&[a_{\boldsymbol{k},\lambda},\ a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}]=[a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger},\ a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}]=0\\&[a_{\boldsymbol{k},\lambda},\ a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}\qquad(\lambda,\lambda'=1,2,3)\\&[a_{\boldsymbol{k},\lambda},\ a_{\boldsymbol{k}',4}{}^{\dagger}]=[a_{\boldsymbol{k},4},\ a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}]=-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,4}\end{aligned}\right\}\qquad(7\cdot11)$$

偏りのベクトルについては，$k_\mu=\left(\boldsymbol{k},\ \dfrac{i\hbar\omega_k}{c}\right)$ とすると

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\mu=0 \qquad (\lambda=1,2)\\&\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu e_{\boldsymbol{k},3}{}^\mu=\frac{\boldsymbol{k}^2}{|\boldsymbol{k}|}=|\boldsymbol{k}|,\\&\sum_{\mu=1}^{4}k_\mu e_{\boldsymbol{k},4}{}^\mu=-i\frac{\hbar\omega_k}{c}=-i|\boldsymbol{k}|\end{aligned}\right\}\tag{7·12}$$

となる．相互作用のない場合，光子の偏りが $\lambda=1,2$ だけであることを保証するために任意の物理的な状態ベクトル（光子が横方向の偏りだけを含む状態の状態ベクトル）$|\Psi\rangle$ に対して

$$\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\lambda=1}^{4}k_\mu e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\mu a_{\boldsymbol{k},\lambda}|\Psi\rangle=|\boldsymbol{k}|(a_{\boldsymbol{k},3}-ia_{\boldsymbol{k},4})|\Psi\rangle=0 \tag{7·13}$$

すなわち

$$(a_{\boldsymbol{k},3}-ia_{\boldsymbol{k},4})|\Psi\rangle=0 \tag{7·14}$$

という条件をつけておけばよい．このような記述は，(5·40) と同一であることがわかる．

さて $A_\mu$ として (7·6)，$\psi$ として (5·50) を用い

$$\left.\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{s=1}^{2}\left[c_{\boldsymbol{p},s}u^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+d_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger v^{(s)}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right]\\\psi^\dagger(\boldsymbol{r})&=\frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\boldsymbol{p}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{s=1}^{2}\left[c_{\boldsymbol{p},s}{}^\dagger u^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}+d_{\boldsymbol{p},s}v^{(s)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\right]\end{aligned}\right.\tag{7·15}$$

$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ に対して (5·60) の対称化

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r})\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})A_\mu(\boldsymbol{r})=\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\gamma_4\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})A_\mu(\boldsymbol{r})\longrightarrow\frac{1}{2}[\psi^\dagger(\boldsymbol{r}),\gamma_4\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})]A_\mu(\boldsymbol{r})$$

を行なう．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{4}[\psi^\dagger(\boldsymbol{r}),\gamma_4\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})]A_\mu(\boldsymbol{r})=&\frac{\sqrt{2\pi\hbar^2c}}{2L^{3/2}}\sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\mu}{\sqrt{|\boldsymbol{k}|}}\\&\times\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}[\psi_\alpha{}^*(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta-\psi_\beta(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\alpha{}^*]\\&\times\left(a_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\psi_\alpha$，$\psi_\alpha{}^*$ は $\psi$，$\psi^\dagger$ の各成分である．

この式に (7·15) を代入し

$$\frac{1}{L^3}\int e^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{r}=\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$$

を用いると，定数因子を除いて次のようになる．

$$\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{r,s=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}}{\sqrt{E_pE_{p'}|\boldsymbol{k}|}}$$
$$\times[c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}u_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})$$
$$+c_{\boldsymbol{p}'r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}u_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}v_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})$$
$$+d_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p},s}v_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})$$
$$+d_{\boldsymbol{p}',r}d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}v_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}v_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})$$
$$-c_{\boldsymbol{p},s}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}u_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})$$
$$-c_{\boldsymbol{p},s}d_{\boldsymbol{p}',r}u_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}v_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})$$
$$-d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}v_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}})$$
$$-d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p}',r}v_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}v_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}+a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})] \quad (7\cdot16)$$

ここで

$$(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)=\sum_{\mu=1}^{4}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}\,\gamma_\mu \quad (7\cdot17)$$

と定義する．$e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}$ の上つきの添字 $\mu$ は，下つき $\mu$ としてもよいが，便宜上，上つきにしてある．以後，任意の 4 元ベクトル $A_\mu, B_\mu$ に対して

$$(A\cdot B)=\sum_{\mu=1}^{4}A_\mu B_\mu,\quad A^2=\sum_{\mu=1}^{4}A_\mu{}^2 \quad (7\cdot18)$$

と略記する．そうすると，(7·16) のたとえば，第 1 項は

$$\sum_{\alpha,\beta,\mu=1}^{4}e_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\mu}u_{\alpha}{}^{(r)*}(\boldsymbol{p}')(\gamma_4\gamma_\mu)_{\alpha\beta}u_{\beta}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})=\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

と書き表される．他の項についても同様な式が得られる．これらの式と，$c_{\boldsymbol{p},s}$，$c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}$，$d_{\boldsymbol{p},s}$，$d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}$ の交換関係を用いると，相互作用ハミルトニアン (7·5) は

$$H_I=ie\int\frac{1}{2}[\psi^{\dagger}(\boldsymbol{r}),\gamma_4\gamma_\mu\psi(\boldsymbol{r})]A_\mu(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$$
$$=\frac{i\sqrt{2\pi\hbar^2c^5}}{L^{3/2}}em\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}',\boldsymbol{k}}\sum_{s,r=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{E_pE_{p'}|\boldsymbol{k}|}}$$
$$\times[c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$+c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$+c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$+c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},-\boldsymbol{p}'}\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$+d_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},-\boldsymbol{p}'}\bar{v}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$-d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p}',r}a_{\boldsymbol{k},\lambda}\delta_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{v}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$+d_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{v}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$-d_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{p}',r}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'}\bar{v}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(s)}(\boldsymbol{p})] \quad (7\cdot19)$$

と表すことができる．

## 7·2 コンプトン散乱の遷移行列要素

自由電子と光子との相互作用ハミルトニアン $H_I$ の具体的な形が，粒子数表現を用いて (7·19) に与えられている．この形を見ると，$H_I$ は光子を1個消滅させるか，あるいは生成する作用をもっている．したがって，$H_I$ を1個だけしか含まない摂動の1次では，Compton 散乱は起こらない．この現象は $H_I$ を2個含む摂動の2次ではじめて現れる．散乱による状態の遷移を記述する $S$ 行列（遷移行列）要素，(5·101)，のうち，相互作用 $H_I$ について2次の項は

$$S_{fi}{}^{(2)}=-2\pi i\delta(E_f-E_i)\sum_n\frac{\langle f|H_I|n\rangle\langle n|H_I|i\rangle}{E_i-E_n+i\beta} \tag{7·20}$$

である．$|i\rangle, |f\rangle$ は (7·2), (7·3) で与えられている．

行列要素 $\langle n|H_I|ps;k\lambda\rangle$ に寄与する中間状態の状態ベクトル $|n\rangle$ としては次の4つの場合がある．

$$c_{p+k,t}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·21a}$$

$$c_{q,t}{}^{\dagger}d_{k-q,t'}{}^{\dagger}c_{p,s}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·21b}$$

$$c_{p-k'',t}{}^{\dagger}a_{k'',\lambda''}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·21c}$$

$$c_{-q,t}{}^{\dagger}d_{q-k'',t'}{}^{\dagger}c_{p,s}{}^{\dagger}a_{k'',\lambda''}{}^{\dagger}a_{k,\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle \tag{7·21d}$$

である．ただし，$k'', q$ は任意の運動量であり，$t, t'$ は1,2を，$\lambda''$ は1,2,3,4の値をとる．状態ベクトル (7·2), (7·3), (7·21) および相互作用ハミルトニアン (7·19) を (7·20) に代入すると，2次の $S$ 行列の行列要素 (7·20) の和の部分は

$$\sum_{\substack{n\\ \beta\to 0}}\frac{\langle p'r;k'\lambda'|H_I|n\rangle\langle n|H_I|ps;k\lambda\rangle}{E_p+|k|c-E_n+i\beta}$$

$$=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5 \tag{7·22}$$

のように，5項に分割して示すことができる．ここに，行列要素 $M_i(i=1,2,3,4,5)$ の具体的な形は実際に計算を遂行すると下記に与えられる．

$$M_1=-\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3\sqrt{|k||k'|E_pE_{p'}}}\delta_{k+p,k'+p'}$$

$$\times\sum_{t=1}^{2}\frac{\bar{u}^{(r)}(p')(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(t)}(p+k)\bar{u}^{(t)}(p+k)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(p)}{E_{p+k}(E_p+|k|c-E_{p+k})} \tag{7·23a}$$

$$M_2=-\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3\sqrt{|k||k'|E_pE_{p'}}}\delta_{k+p,k'+p'}$$

$$\times\sum_{t=1}^{2}\frac{\bar{u}^{(r)}(p')(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)v^{(t)}(-p-k)\bar{v}^{(t)}(-p-k)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(p)}{E_{p+k}(E_p+|k|c+E_{p+k})} \tag{7·23b}$$

$$M_3=\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3\sqrt{|k||k'|E_pE_{p'}}}\delta_{k+p,k'+p'}$$

$$\times\sum_{t=1}^{2}\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(t)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')\bar{v}^{(t)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'}(|\boldsymbol{k}|c-E_{\boldsymbol{p}'}-E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'})} \qquad (7\cdot 23c)$$

$$M_4=\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}'}$$

$$\times\sum_{t=1}^{2}\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(t)}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})\bar{u}^{(t)}(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k})(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'}(|\boldsymbol{k}|c-E_{\boldsymbol{p}'}+E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'})} \qquad (7\cdot 23d)$$

$$M_5=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{r,s}\times(\text{発散量}) \qquad (7\cdot 23e)$$

例として $(7\cdot 23c)$ を実際に導出してみよう．中間状態として $(7\cdot 21b)$ の $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'$，$t=r$ の場合，すなわち $|n\rangle=c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}|0\rangle$ を考える．この場合，$\langle\boldsymbol{p}'r;\boldsymbol{k}'\lambda'|H_I|n\rangle$ に寄与するのは，$H_I$ のうち $d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}$ を含む項であり，$\langle n|H_I|\boldsymbol{p}s;\boldsymbol{k}\lambda\rangle$ に寄与するのは $c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}$ を含む項であるから

$$\langle\boldsymbol{p}'r;\boldsymbol{k}'\lambda'|H_I|n\rangle\langle n|H_I|\boldsymbol{p}s;\boldsymbol{k}\lambda\rangle$$

$$=-\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3}\Big[\sum_{t'}\langle 0|a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}c_{\boldsymbol{p}',r}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}|0\rangle$$

$$\times\delta_{-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'}\langle 0|c_{\boldsymbol{p},s}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}c_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p}'r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}(E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}{}')^2}}\bar{v}^{(t')}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)$$

$$\times v^{(t')}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')\Big]$$

ところで

$$\langle 0|a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}c_{\boldsymbol{p}',r}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}c_{\boldsymbol{p},s}a_{\boldsymbol{k}'\lambda'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}|0\rangle$$
$$=-\langle 0|a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}a_{\boldsymbol{k}',\lambda'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p},s}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}|0\rangle$$
$$=-1$$

同様にして

$$\langle 0|c_{\boldsymbol{p},s}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}c_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle$$
$$=\langle 0|c_{\boldsymbol{p},s}c_{\boldsymbol{p},s}{}^{\dagger}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}d_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}',t'}{}^{\dagger}c_{\boldsymbol{p}',r}c_{\boldsymbol{p}',r}{}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k},\lambda}a_{\boldsymbol{k},\lambda}{}^{\dagger}|0\rangle$$
$$=1$$

また

$$E_n=E_{\boldsymbol{p}'}+E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'}+E_{\boldsymbol{p}}$$

以上の結果を用い，$t'$ を $t$ と書きかえると

$$\sum_{\substack{t\\ \beta\to 0}}\frac{\langle\boldsymbol{p}'r;\boldsymbol{k}'\lambda'|H_I|n\rangle\langle n|H_I|\boldsymbol{p}s;\boldsymbol{k}\lambda\rangle}{E_{\boldsymbol{p}}+|\boldsymbol{k}|c-E_n+i\beta}$$

$$=\frac{2\pi e^2m^2\hbar^2c^5}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'}$$

$$\times\sum_{t=1}^{2}\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)v^{(t)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')\bar{v}^{(t)}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'}(|\boldsymbol{k}|c-E_{\boldsymbol{p}'}-E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'})}$$

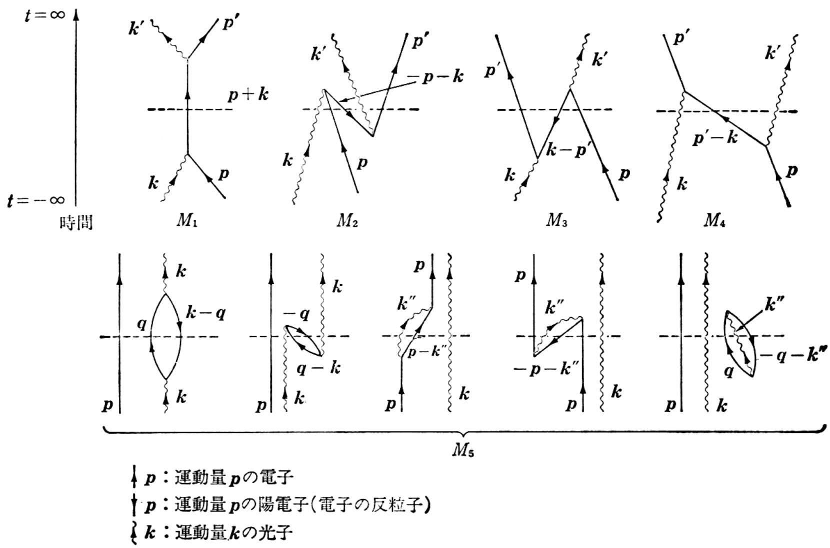



**図 7·1**

となって，$M_3$が得られる．

行列要素 $M_i(i=1,2,3,4,5)$ を Feynman 図形を用いて，図 7·1 のように表すことができる．ここでは，紙面の下方向は始状態を，上方向は終状態を示し，反応の時間的経過を表している．また点線は中間状態を表す．

行列要素 $M_5$ は，(*7·23e*) からわかるように，始状態と終状態とが同一であることを要求しているから，Compton 散乱には寄与しない．$M_5$ の中には，相互作用のために光子がもつ自己エネルギー，電子の自己エネルギー，真空の自己エネルギーが含まれている．図 7·1 において，$M_5$ 対応する 5 つの図形のうち，左から 1 番目および 2 番目の図形は**光子の自己エネルギー**，3 番目と 4 番目の図形は**電子の自己エネルギー**，一番右の図形は**真空の自己エネルギー**を表している．これらのエネルギーは粒子のもつ運動量には無関係であり，粒子の質量の変化と考えることができる．これは，$t=\pm\infty$ で相互作用が消え，自由場になっているとした断熱操作の導入が正しくなかった結果である．すなわち，いかなる時刻においても，粒子は相互作用を受けている．したがって，我々が観測しているのは，相互作用の存在する場における粒子の質量であるから，相互作用のために生じた余分の質量 $\delta m$（実は無限大の質量）を相互作用のない場合のハミルトニアンにくりこみ，もともとの質量 $m$ と $\delta m$ との和を我々が観測する質量として，全ハミルトニアンを書き直せばよい．このような操作は，摂動計算の各次数において可能である

(高い次数では，電荷 $e$，および波動関数に対しても補正が必要になる)．このような手続きを **"くりこみ理論"** といい，断熱操作によって生じた困難を避けるのに用いられる．今とり扱っている2次の摂動計算では，"質量のくりこみ"を行なうだけでよい．

Compton 散乱に寄与する行列要素は，以上の結果から，$M_1, M_2, M_3, M_4$ だけである．ここで，(3·80) と (3·82) の関係式

$$\sum_{t=1}^{2} u^{(t)}(\boldsymbol{p})\bar{u}^{(t)}(\boldsymbol{p}) = \frac{-i(p\cdot\gamma)+mc}{2mc} \tag{7·24}$$

$$\sum_{t=1}^{2} v^{(t)}(\boldsymbol{p})\bar{v}^{(t)}(\boldsymbol{p}) = -\frac{i(p\cdot\gamma)+mc}{2mc} \tag{7·25}$$

を用いる．そうすると

$$\begin{aligned} M_a = M_1 + M_2 = &-\frac{2\pi e^2 m^2 \hbar^2 c^5}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'} \\ &\times\left\{\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)[-i(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\gamma}+(E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}/c)\gamma_4+mc](e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{2mcE_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}(E_{\boldsymbol{p}}+|\boldsymbol{k}|c-E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})}\right. \\ &\left.+\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)[i(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\gamma}+(E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}/c)\gamma_4-mc](e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{2mcE_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}}(E_{\boldsymbol{p}}+|\boldsymbol{k}|c+E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}})}\right\} \\ = &\frac{2\pi e^2 m\hbar^2 c^4}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'} \\ &\times\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)[-i(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\gamma}+(E_{\boldsymbol{p}}/c+|\boldsymbol{k}|)\gamma_4+mc](e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{c^2(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2-(E_{\boldsymbol{p}}+|\boldsymbol{k}|c)^2+m^2c^4} \end{aligned}$$

となる．また

$$(p+k)^2 = (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2 - \left(\frac{E_p}{c}+|\boldsymbol{k}|\right)^2 \tag{7·26}$$

であるから

$$\begin{aligned} M_a = &\frac{2\pi e^2 m\hbar^2 c^2}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'} \\ &\times\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)[-i((p+k)\cdot\gamma)+mc](e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{(p+k)^2+m^2c^2} \end{aligned} \tag{7·27}$$

同様にして

$$\begin{aligned} M_b = M_3 + M_4 = &\frac{2\pi e^2 m\hbar^2 c^2}{L^3\sqrt{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{p}}E_{\boldsymbol{p}'}}}\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{p}'} \\ &\times\frac{\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)[-i((p-k')\cdot\gamma)+mc](e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})}{(p-k')^2+m^2c^2} \end{aligned} \tag{7·28}$$

行列要素 $M_a$ は，図7·1の $M_1$ と $M_2$ の寄与に相当するので，相対論的に不変である．それゆえ，相対論的 Feynman 図を画くと，図6·2の（i）と同型の図で表現されるが，ここではその詳細を省略する．同様に行列要素 $M_b$ は，図7·1の $M_3$ と $M_4$ の寄与を含んでおり，相対論的な Feynman 図は図6·2の（ii）と同型の図で表現される．

## 7·3 コンプトン散乱の散乱断面積

遷移行列要素が得られたから，これを用いて Compton 散乱の散乱断面積を計算しよう．(5·103), (5·105) より，単位時間あたりの遷移確率 $w_{fi}$ は

$$w_{fi}=\frac{2\pi}{\hbar}|M_{fi}|^2\delta(E_p+|k|c-E_{p'}-|k'|c) \tag{7·29}$$

で与えられる．また

$$M_{fi}=M_a+M_b=\frac{2\pi e^2 m\hbar^2c^2}{L^3\sqrt{|k||k'|E_pE_{p'}}}\delta_{k+p,k'+p'}T_{s\lambda,r\lambda'} \tag{7·30}$$

$$T_{s\lambda,r\lambda'}=\bar{u}^{(r)}(p')\left\{\frac{(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)[-i((p+k)\cdot\gamma)+mc](e_{k,\lambda}\cdot\gamma)}{(p+k)^2+m^2c^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)[-i((p-k')\cdot\gamma)+mc](e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)}{(p-k')^2+m^2c^2}\right\}u^{(s)}(p) \tag{7·31}$$

である．

実験では，電子のスピン状態を特に指定しない．そこで電子の始状態のスピン方向 $s$ について平均し，終状態のスピン方向 $r$ について和をとり，さらに終状態の電子および光子の運動量について和をとれば

$$W=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{1}{L^6}\sum_{k',p'}\frac{(2\pi e^2m\hbar^2c^2)^2}{|k||k'|E_pE_{p'}}\delta(E_p+|k|c-E_{p'}-|k'|c)\delta_{k+p,k'+p'}$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2 \tag{7·32}$$

となる．実験室系での散乱断面積は，上式を毎秒単位面積を通過してくる光子の数 $n_0$ で割れば得られる．光子が体積 $L^3$ 中に 1 個あるとすると

$$n_0=\frac{c}{L^3}$$

であるから，断面積 $\sigma$ は

$$\sigma=\frac{W}{n_0}=(2\pi)^3e^4m^2\hbar^3c^3\frac{1}{L^3}\sum_{k'}\frac{1}{|k||k'|E_{k-k'}mc^2}\delta(mc^2+|k|c-E_{k-k'}-|k'|c)$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2,\qquad (p=0,\ p'=k-k') \tag{7·33}$$

となる．ここで長さ $L$ を非常に大きくとり

$$\frac{1}{L^3}\sum_{k'}\longrightarrow\int\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}dk' \tag{7·34}$$

とおきかえると

$$\sigma=\frac{e^4mc}{|k|}\int\frac{dk'}{|k'|E_{k-k'}}\delta(mc^2+|k|c-E_{k-k'}-|k'|c)$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2 \tag{7·35}$$

となる．さらに

$$E_f = |\boldsymbol{k}'|c + E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}$$

とおき，$|\boldsymbol{k}'|$ についての積分を $E_f$ についての積分に直して行なうことにする．

$$\frac{dE_f}{d|\boldsymbol{k}'|} = \frac{d}{d|\boldsymbol{k}'|}\left[c|\boldsymbol{k}'| + \sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2c^2 + m^2c^4}\right]$$

$$= c + \frac{(|\boldsymbol{k}'| - |\boldsymbol{k}|\cos\theta)c^2}{\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2c^2 + m^2c^4}} \qquad (\theta \text{ は } \boldsymbol{k} \text{ と } \boldsymbol{k}' \text{ とのなす角})$$

$$= c + \frac{|\boldsymbol{k}'|^2c^2 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')c^2}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}|\boldsymbol{k}'|}$$

$$= \frac{c|\boldsymbol{k}'|E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'} + |\boldsymbol{k}'|^2c^2 - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')c^2}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}|\boldsymbol{k}'|}$$

ここで，エネルギー保存則

$$mc^2 + |\boldsymbol{k}|c = E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'} + |\boldsymbol{k}'|c$$

を用いると

$$\frac{dE_f}{d|\boldsymbol{k}'|} = \frac{c^2|\boldsymbol{k}'|(mc + |\boldsymbol{k}|) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')c^2}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}|\boldsymbol{k}'|} = \frac{mc^2|\boldsymbol{k}|c}{E_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'}|\boldsymbol{k}'|} \tag{7·36}$$

(7·36) により，(7·35) の $|\boldsymbol{k}'|$ についての積分を $E_f$ についての積分におきかえて実行することができて

$$\sigma = \frac{e^4}{c^2}\int d\Omega_{\boldsymbol{k}'}\frac{|\boldsymbol{k}'|^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2 \tag{7·37}$$

あるいは，微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{c^2}\frac{|\boldsymbol{k}'|^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2 \tag{7·38}$$

で与えられる．断面積の具体的な形を求めるには，スピンの和を計算しなければならない．そのために，$T_{s\lambda,r\lambda'}$ を次のように変形する．まず

$$[i(p\cdot\gamma) + mc]u(\boldsymbol{p}) = 0,\quad p^2 + m^2c^2 = 0,\quad \text{および}\quad k^2 = k'^2 = 0$$

に注意すると

$$(p+k)^2 + m^2c^2 = 2p\cdot k$$

$$(p-k')^2 + m^2c^2 = -2p\cdot k'$$

付録Bの (B·4) より

$$((p+k)\cdot\gamma)(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma) = 2((p+k)\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda}) - (e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)((p+k)\cdot\gamma)$$

であるから

$$[-i((p+k)\cdot\gamma) + mc](e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

$$= [-2i((p+k)\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda}) + i(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)((p+k)\cdot\gamma) + (e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)mc]u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

$$= [-2i((p+k)\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda}) + i(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)((p+k)\cdot\gamma) - i(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)]u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

$$= [-2i((p+k)\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda}) + i(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

同様にして

$$[-i((p-k')\cdot\gamma)+mc](e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$=[-2i((p-k')\cdot e_{k',\lambda'})-i(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(k'\cdot\gamma)]u^{(s)}(\boldsymbol{p})$$

これらを (7·31) に代入すると

$$T_{s\lambda,r\lambda'}=\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')\Big\{(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)\frac{[-2i((p+k)\cdot e_{k,\lambda})+i(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]}{2(p\cdot k)}$$
$$+(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)\frac{[-2i((p-k')\cdot e_{k',\lambda'})-i(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(k'\cdot\gamma)]}{-2(p\cdot k')}\Big\}u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \tag{7·39}$$

また，実験室系では $\boldsymbol{p}=0$ であるから，$\lambda,\lambda'=1,2$ に対して

$$(p\cdot e_{k,\lambda})=(p\cdot e_{k',\lambda'})=0 \tag{7·40}$$

さらに

$$(k\cdot e_{k,\lambda})=(k'\cdot e_{k',\lambda'})=0 \tag{7·41}$$

であるから

$$T_{s\lambda,r\lambda'}=i\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')\Big[\frac{(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)}{2(p\cdot k)}+\frac{(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(k'\cdot\gamma)}{2(p\cdot k')}\Big]$$
$$\times u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \tag{7·42}$$

となる．ここでさらに

$$a_\mu=\frac{k_\mu'}{2(p\cdot k')}-\frac{k_\mu}{2(p\cdot k)},\qquad (a\cdot p)=0 \tag{7·43}$$

を定義する．この $a_\mu$ を用いると

$$T_{s\lambda,r\lambda'}=i\bar{u}^{(r)}(\boldsymbol{p}')\Big[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)+(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}\Big]u^{(s)}(\boldsymbol{p}) \tag{7·44}$$

と書き直すことができる．

$$T_{s\lambda,r\lambda'}\equiv i\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\bar{u}_\rho{}^{(r)}(\boldsymbol{p}')F_{\rho\sigma}u_\sigma{}^{(s)}(\boldsymbol{p}) \tag{7·45}$$

とおくと，(7·24) を用いて

$$\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2=\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\sum_{\rho',\sigma'=1}^{4}\bar{u}_\rho{}^{(r)}(\boldsymbol{p}')F_{\rho\sigma}u_\sigma{}^{(s)}(\boldsymbol{p})$$
$$\times\bar{u}_{\sigma'}{}^{(s)}(\boldsymbol{p})(\gamma_4F^\dagger\gamma_4)_{\sigma'\rho'}u_{\rho'}{}^{(r)}(\boldsymbol{p}')$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{4}\sum_{\rho',\sigma'=1}^{4}\frac{[-i(p'\cdot\gamma)+mc]_{\rho'\rho}}{2mc}F_{\rho\sigma}$$
$$\times\frac{[-i(p\cdot\gamma)+mc]_{\sigma\sigma'}}{2mc}(\gamma_4F^\dagger\gamma_4)_{\sigma'\rho'}$$
$$=\frac{1}{8m^2c^2}\mathrm{Tr}\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc]F[-i(p\cdot\gamma)+mc]\gamma_4F^\dagger\gamma_4\} \tag{7·46}$$

と与えられる．ここで，Tr は付録Bの (B·7) で定義されたトレースである．

$$\gamma_4F^\dagger\gamma_4=-(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)-(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)} \tag{7·47}$$

であるから，(7·46) は

$$\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2=-\frac{1}{8m^2c^2}\mathrm{Tr}\Big\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc]\Big[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)$$

$$+(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}\Big][-i(p\cdot\gamma)+mc]\Big[(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)$$

$$+(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}\Big]\Big\}$$

$$\equiv\frac{1}{8m^2c^2}[N_1+N_2+N_3+N_4] \tag{7·48}$$

となる．ただし

$$N_1=-\mathrm{Tr}\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc](e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)[-i(p\cdot\gamma)+mc]$$
$$\times(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)\} \tag{7·49}$$

$$N_2=-(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})^2\mathrm{Tr}\Big\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc]\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}[-i(p\cdot\gamma)+mc]\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}\Big\} \tag{7·50}$$

$$N_3=-(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\mathrm{Tr}\Big\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc](e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)$$

$$\times[-i(p\cdot\gamma)+mc]\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}\Big\} \tag{7·51}$$

$$N_4=-(e_{k',\lambda'}\cdot e_{k,\lambda})\mathrm{Tr}\Big\{[-i(p'\cdot\gamma)+mc]\frac{(k\cdot\gamma)}{(p\cdot k)}[-i(p\cdot\gamma)+mc](a\cdot\gamma)$$

$$\times(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)\Big\}$$

$$=N_3$$

とおいた．$N_4$ と $N_3$ が等しいことは，(B·21), (B·22) を用いて次のようにして示すことができる．

$$\mathrm{Tr}[(k\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$=\mathrm{Tr}[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$

$$\mathrm{Tr}[(p'\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$=(p'\cdot k)\mathrm{Tr}[(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$-(p'\cdot p)\mathrm{Tr}[(k\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$+(p'\cdot a)\mathrm{Tr}[(k\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$-(p'\cdot e_{k',\lambda'})\mathrm{Tr}[(k\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)]$$
$$+(p'\cdot e_{k,\lambda})\mathrm{Tr}[(k\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)]$$
$$=(p'\cdot e_{k,\lambda})\mathrm{Tr}[(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$
$$-(p'\cdot e_{k',\lambda'})\mathrm{Tr}[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$
$$+(p'\cdot a)\mathrm{Tr}[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$
$$-(p'\cdot p)\mathrm{Tr}[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$

$$+(p'\cdot k)\mathrm{Tr}[(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)]$$
$$=\mathrm{Tr}[(p'\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)]$$

ゆえに

$$N_3=N_4$$

付録Bに与えられた方法によって，トレースを計算する．$N_1$ について実際に行なってみよう．まず，(*B·4*) より

$$(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)=2(a\cdot\gamma)(p\cdot a)-(a\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)$$
$$=2(a\cdot\gamma)(p\cdot a)-a^2(p\cdot\gamma)$$

(*7·43*) より $(p\cdot a)=0$ であるから

$$(a\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)=-a^2(p\cdot\gamma)$$

(*7·40*) を用いると，同様にして

$$(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)=-(p\cdot\gamma)$$
$$(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)=-(p\cdot\gamma)$$

これらを用いると

$$[-i(p'\cdot\gamma)+mc](e_{k,\lambda}\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)[-i(p\cdot\gamma)+mc](a\cdot\gamma)(e_{k',\lambda'}\cdot\gamma)$$
$$\times(e_{k,\lambda}\cdot\gamma)=a^2[-i(p'\cdot\gamma)+mc][i(p\cdot\gamma)+mc]$$

となる．また

$$p_\mu'=p_\mu+k_\mu-k_\mu'$$

であるから，$N_1$ は

$$N_1=-a^2\mathrm{Tr}\{[-i(p\cdot\gamma)+mc-i((k-k')\cdot\gamma)][i(p\cdot\gamma)+mc]\}$$

さらに

$$[-i(p\cdot\gamma)+mc][i(p\cdot\gamma)+mc]=p^2+m^2c^2=0$$

を用いると

$$N_1=-a^2\mathrm{Tr}\{i((k'-k)\cdot\gamma)[i(p\cdot\gamma)+mc]\}$$

(*B·19*) を用いてトレースを計算すると

$$N_1=4a^2((k'-k)\cdot p)$$

が得られる．$p_\mu=(\mathbf{0},imc)$，$k_\mu=(\boldsymbol{k},i|\boldsymbol{k}|)$，$k_\mu'=(\boldsymbol{k}',i|\boldsymbol{k}'|)$ および (*7·43*) より

$$a^2=\sum_{\mu=1}^{4}\left[\frac{k_\mu'}{2(p\cdot k')}-\frac{k_\mu}{2(p\cdot k)}\right]^2=\frac{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'+|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|}{2m^2c^2|\boldsymbol{k}'||\boldsymbol{k}|}$$

ここで，エネルギー保存則

$$mc^2+|\boldsymbol{k}|c=\sqrt{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')^2c^2+m^2c^4}+|\boldsymbol{k}'|c$$

を用いると

$$|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'=mc(|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{k}'|) \tag{7·52}$$

であるから

$$a^2=\frac{|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{k}'|}{2mc|\boldsymbol{k}'||\boldsymbol{k}|}$$

となる．一方，$((k'-k)\cdot p)=mc(|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{k}'|)$ であるから，結局

$$N_1=\frac{2(|\boldsymbol{k}'|-|\boldsymbol{k}|)^2}{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|} \tag{7·53}$$

が得られる．$N_2$ についても

$$(k\cdot\gamma)(p\cdot\gamma)(k\cdot\gamma)=2(p\cdot k)(k\cdot\gamma)-(p\cdot\gamma)k^2=2(p\cdot k)(k\cdot\gamma)$$

であるから

$$N_2=8(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda})^2\left[\frac{(p\cdot k)-(k\cdot k')}{(p\cdot k)}\right]=8(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda})^2\left(1+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'-|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|}{|\boldsymbol{k}|mc}\right) \tag{7·54}$$

$$N_3+N_4=8(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda})^2\frac{(k'\cdot k)}{(p\cdot k)}=8(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda})^2\left(\frac{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'}{|\boldsymbol{k}|mc}\right) \tag{7·55}$$

(7·48), (7·53), (7·54) および (7·55) より

$$\frac{1}{2}\sum_{s,r=1}^{2}|T_{s\lambda,r\lambda'}|^2=\frac{1}{4m^2c^2}\left[\frac{(|\boldsymbol{k}|-|\boldsymbol{k}'|)^2}{|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|}+4(e_{\boldsymbol{k}',\lambda'}\cdot e_{\boldsymbol{k},\lambda})^2\right] \tag{7·56}$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'=|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'|\cos\theta \tag{7·57}$$

とおけば，(7·52) より

$$|\boldsymbol{k}'|=\frac{mc|\boldsymbol{k}|}{mc+|\boldsymbol{k}|(1-\cos\theta)} \tag{7·58}$$

が得られ，Compton 散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})^2\left[1+\frac{|\boldsymbol{k}|}{mc}(1-\cos\theta)\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{mc}\right)^2(1-\cos\theta)^2}{\left[1+\frac{|\boldsymbol{k}|}{mc}(1-\cos\theta)\right]^3} \tag{7·59}$$

と与えられる．ここで光子の偏り $\lambda,\lambda'=1,2$ に対して (7·7) を用い

$$(e_{\boldsymbol{k},\lambda}\cdot e_{\boldsymbol{k}',\lambda'})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})$$

とおいた．

この式は**クライン・仁科** (Klein–Nishina) **の式**と呼ばれていて，実験と非常によい一致を得ている．

(7·59) において，光子のエネルギー $|\boldsymbol{k}|c$ が電子の静止エネルギー $mc^2$ にくらべて十分小さいときは

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\cong\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})^2 \tag{7·60}$$

となり，これは §6·4 で得た Thomson 散乱の断面積と同一であることがわか

る.

始状態および終状態の光子の偏りを観測しなければ，光子の偏りについて始状態で平均し，終状態では和をとらなければならない．(6·72) より

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}{}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}'}{}^{(\lambda')})^2=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \tag{7·61}$$

であるから，(7·60) より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\cong\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2(1+\cos^2\theta) \tag{7·62}$$

また，全断面積は

$$\sigma\cong\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \tag{7·63}$$

となる．$(\hbar/mc)$ は長さの単位をもち，**Compton 波長**と呼ばれている．

# 付　　　　録

## 付録A　3次元ベクトルの演算記号

本文の記述に必要な3次元ベクトルの演算記号を，この付録にまとめる．任意の3次元ベクトル量 $\boldsymbol{A}$, 任意のスカラー量 $\phi$ は，それぞれ空間座標について微分可能な連続関数である．まずベクトル $\boldsymbol{A}$ の div を**ダイバージェンス** (divergence, 発散) $\boldsymbol{A}$ という．

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \tag{A・1}$$

次に rot $\boldsymbol{A}$ は**ローテーション** (rotation, 回転) $\boldsymbol{A}$ といい，$x$, $y$, $z$ 成分をもっている．

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y$$

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})_y = \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z$$

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \tag{A・2}$$

上式の $y, z$ 成分は，$x$ 成分より，$x$, $y$, $z$ の文字をサイクリックに変えることによって導かれる．スカラー量 $\phi$ の grad を**グラジエント** (gradient, 勾配) $\phi$ といい，$x$, $y$, $z$ 成分をもっている．

$$(\mathrm{grad}\, \phi)_x = \frac{\partial}{\partial x} \phi$$

$$(\mathrm{grad}\, \phi)_y = \frac{\partial}{\partial y} \phi \tag{A・3}$$

$$(\mathrm{grad}\, \phi)_z = \frac{\partial}{\partial z} \phi$$

2個の3次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**スカラー積** (scalar product, 内積) を次のように定義する．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{A·4}$$

また，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**ベクトル積** (vector product, 外積) は，次のように $x, y, z$ 成分によって定義される．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_x&=A_yB_z-A_zB_y\\(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_y&=A_zB_x-A_xB_z\\(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_z&=A_xB_y-A_yB_x\end{aligned} \tag{A·5}$$

上式において下付添字 $x, y, z$ はサイクリックに変化する．

また，2個のベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ のベクトル積のダイバージェンスは，次式を満たす．

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) \tag{A·6}$$

この式は次のようにして確かめられる．

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)\\&=A_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\\&\quad+\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)B_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial_z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)B_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)B_z\end{aligned}$$

また次式は恒等的に成り立つ．

$$\mathrm{div}\;\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0 \tag{A·7}$$

$$\mathrm{rot}\;\mathrm{grad}\,\phi=0 \tag{A·8}$$

ラプラシアン $\varDelta$ は次のような演算子である．

$$\varDelta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A·9}$$

したがって

$$\mathrm{div}\;\mathrm{grad}\,\phi=\varDelta\phi \tag{A·10}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の rot rot は次式で与えられる．

$$\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}\;\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}-\varDelta\boldsymbol{A} \tag{A·11}$$

この式はたとえば $x$ 成分を計算することによって確かめられる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\\&=-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}A_y+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}A_z\end{aligned}$$

$$=-\Delta A_x+\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

## 付録 B　γ行列とトレース

この付録では3章の（3・23）で定義されたγ行列の性質と，7章での遷移確率の計算に必要な，γ行列を含んだ行列のトレース（trace，跡）に関するいくつかの関係式を紹介する．（3・24）を満たす$\gamma_\mu$は一般に$n$次元正方行列であるが，我々の場合4次元で必要かつ十分である．そのことを証明するためにも，下記の関係式が用いられる．下記の記述は$n$次元正方行列として述べてあるが，我々の物理に必要な具体的な演算では，下記の諸公式を$n=4$と考えて応用してよい．

### B・1　γ行列の代数

遷移行列要素には，いくつかの**γ行列の積**が現れる．これをより少ない数のγ行列の積に書きかえるために有効な，下記の諸関係式を与えておこう．これらの式の証明には，4元ベクトルと$\gamma_\mu$のスカラー積を簡単のため

$$\not{a}\equiv(a\cdot\gamma)=\sum_{\mu=1}^{4}a_\mu\gamma_\mu \qquad (B\cdot 1)$$

と定義すると便利である．以下，4元ベクトル，$a$, $b$, …，は交換可能である．

［1］

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu(a\cdot\gamma)\gamma_\mu=-2(a\cdot\gamma) \qquad (B\cdot 2)$$

**証明**（3・24）を用いると

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=\gamma_\nu \qquad \mu=\nu\text{のとき}$$
$$=-\gamma_\nu \qquad \mu\neq\nu\text{のとき}$$

であり，$\mu\neq\nu$には3つの場合が可能であるから（たとえば，$\nu=1$ならば$\mu=2$, 3, 4）

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=-3\gamma_\nu+\gamma_\nu=-2\gamma_\nu \qquad (B\cdot 3)$$

ゆえに

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\gamma_\mu a_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\sum_{\nu=1}^{4}a_\nu\gamma_\nu$$

［2］

$$(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)+(b\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)=2(a\cdot b) \qquad (B\cdot 4)$$

**証明** (*B*・*1*) および (*3*・*24*) より

$$\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}=\sum_{\mu,\nu=1}^{4}\left[(a_\mu\gamma_\mu)(b_\nu\gamma_\nu)+(b_\nu\gamma_\nu)(a_\mu\gamma_\mu)\right]$$

$$=\sum_{\nu,\nu=1}^{4}(a_\mu b_\nu)(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)$$

$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{4}2a_\mu b_\nu\delta_{\mu,\nu}=2(a\cdot b)$$

［3］
$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)\gamma_\mu=4(a\cdot b) \qquad (B\cdot 5)$$

**証明**
$$\gamma_\mu\gamma_\nu=1 \qquad \mu=\nu$$
$$=-\gamma_\nu\gamma_\mu \qquad \mu\neq\nu$$

であるから

$$\gamma_\mu\not{a}+\not{a}\gamma_\mu=\gamma_\mu\sum_{\nu=1}^{4}a_\nu\gamma_\nu+\sum_{\nu=1}^{4}a_\nu\gamma_\nu\gamma_\mu$$

$$=\sum_{\nu=1}^{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)a_\nu=2a_\mu$$

したがって

$$\gamma_\mu\not{a}=-\not{a}\gamma_\mu+2a_\mu$$

同様に

$$\not{b}\gamma_\mu=-\gamma_\mu\not{b}+2b_\mu$$

ゆえに

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma_\mu=\sum_{\mu=1}^{4}(-\not{a}\gamma_\mu+2a_\mu)(-\gamma_\mu\not{b}+2b_\mu)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{4}(\not{a}\gamma_\mu{}^2\not{b}+4a_\mu b_\mu-2\not{a}\gamma_\mu b_\mu-2a_\mu\gamma_\mu\not{b})$$

$$=4\not{a}\not{b}+4(a\cdot b)-4\not{a}\not{b}$$

$$=4(a\cdot b)$$

［4］
$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)\gamma_\mu=-2(c\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(a\cdot\gamma) \qquad (B\cdot 6)$$

**証明**
$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\mu=2\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu=-2\gamma_\nu\gamma_\tau\gamma_\sigma$$

となることを示せばよい．$\sigma$, $\tau$, $\nu$ のうち2つが等しければ (*B*・*3*) に帰するから，$\sigma$, $\tau$, $\nu$ がすべて異なるものとする．

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\mu=\gamma_\sigma\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\sigma+\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\tau+\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\nu+\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\rho$$

$$=\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\sigma-\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\tau+\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\tau-\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu=2\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu=-2\gamma_\nu\gamma_\tau\gamma_\sigma$$

ここで，$\rho$ は $\sigma, \tau, \nu$ のいずれとも異なる．したがって

$$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma_\mu=\sum_{\mu,\sigma,\tau,\nu=1}^{4}a_\sigma b_\tau c_\nu\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\tau\gamma_\nu\gamma_\mu=-2\sum_{\sigma,\tau,\nu=1}^{4}a_\sigma b_\tau c_\nu\gamma_\nu\gamma_\tau\gamma_\sigma$$
$$=-2\not{c}\not{b}\not{a}$$

## B·2　$\gamma$ 行列のトレース

$n$ 次元の正方行列（$n\times n$ 行列），$A=(A_{ij})$，のトレースを次のように定義する．

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}=A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn} \qquad (B\cdot7)$$

トレースには次のような基本的性質がある．

[5]
$$\mathrm{Tr}(cA)=c\mathrm{Tr}(A)$$
$$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B) \qquad (B\cdot8)$$

上記の性質を**線形性**という．$c$ は通常の数である．($B\cdot8$) は定義より明らかである．

[6]
$$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA) \qquad (B\cdot9)$$

**証明**　上記の性質を**可換性**という．行列の積とトレースの定義により

$$\mathrm{Tr}(AB)=\sum_{i,j}A_{ij}B_{ji}=\sum_{i,j}B_{ji}A_{ij}=\mathrm{Tr}(BA)$$

[7]　$S$ を正則行列とすると

$$\mathrm{Tr}(S^{-1}AS)=\mathrm{Tr}(A) \qquad (B\cdot10)$$

**証明**　($B\cdot9$) より

$$\mathrm{Tr}[S^{-1}(AS)]=\mathrm{Tr}[(AS)S^{-1}]=\mathrm{Tr}(A)$$

次に，$\gamma$ から作られた行列のトレースを考えよう．行列 $\gamma_\mu$ の次元数を $n$ とする．

[8]
$$\mathrm{Tr}(1)=n \qquad 1：単位行列 \qquad (B\cdot11)$$

**証明**
$$\mathrm{Tr}(1)=\sum_{i=1}^{n}(1)_{ii}=n$$

[9]
$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=n\delta_{\mu,\nu} \qquad (B\cdot12)$$

**証明**
$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu,\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4)$$

のトレースをとると

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu)=\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)+\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu)=2n\delta_{\mu,\nu}$$

$(B\cdot 9)$ より

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu)$$

であるから

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=n\delta_{\mu,\nu}$$

[10]　奇数個の行列 $\gamma_\mu(\mu=1,2,3,4)$ を含むトレースは0である．

**証明**　$(3\cdot 31)$ より

$$\gamma_5\gamma_5=1 \tag{B·13}$$

$$\gamma_\mu\gamma_5=-\gamma_5\gamma_\mu \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{B·14}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})&=\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\gamma_5\gamma_5)\\&=-\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_5\gamma_{\mu_m}\gamma_5)\\&=(-1)^m\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\gamma_5)\end{aligned}$$

ここで $(B\cdot 9)$ より

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\gamma_5)=\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\gamma_5\gamma_5)=\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})$$

である．したがって

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})=(-1)^m\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})$$

$m$が奇数だから

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})=0 \tag{B·15}$$

同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_5)&=\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\mu)=-\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\mu)\quad(\mu\neq 5)\\&=-\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\mu)=-\mathrm{Tr}(\gamma_5)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{Tr}(\gamma_5)=0 \tag{B·16}$$

[11]

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)=n(\delta_{\mu,\nu}\delta_{\rho,\sigma}-\delta_{\mu,\rho}\delta_{\nu,\sigma}+\delta_{\mu,\sigma}\delta_{\nu,\rho}) \tag{B·17}$$

**証明**　$\gamma_\mu\gamma_\nu=2\delta_{\mu,\nu}-\gamma_\nu\gamma_\mu$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)&=\mathrm{Tr}(2\delta_{\mu,\nu}\gamma_\rho\gamma_\sigma)-\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma)\\&=2\delta_{\mu,\nu}\mathrm{Tr}(\gamma_\rho\gamma_\sigma)-\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\sigma)\end{aligned}$$

ここでまた $\gamma_\mu\gamma_\rho=2\delta_{\mu,\rho}-\gamma_\rho\gamma_\mu$，$\gamma_\mu\gamma_\sigma=2\delta_{\mu,\sigma}-\gamma_\sigma\gamma_\mu$ を用いると

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)=2\delta_{\mu,\nu}\mathrm{Tr}(\gamma_\rho\gamma_\sigma)-2\delta_{\mu,\rho}\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma)+\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma)$$

$$=2\delta_{\mu,\nu}\mathrm{Tr}(\gamma_\rho\gamma_\sigma)-2\delta_{\mu,\rho}\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma)+2\delta_{\mu,\sigma}\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho)-\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu)$$

となる．(*B*·*9*) より

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu)=\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)$$

であり，また (*B*·*12*) より $\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=n\delta_{\mu,\nu}$ であるから

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)=n(\delta_{\mu,\nu}\delta_{\rho,\sigma}-\delta_{\mu,\rho}\delta_{\nu,\sigma}+\delta_{\mu,\sigma}\delta_{\nu,\rho})$$

このようにして，一般にトレースの中に現れるγ行列を2個減らすことができる．

［12］　奇数の $m$ に対して

$$\mathrm{Tr}[(a_1\cdot\gamma)(a_2\cdot\gamma)\cdots(a_m\cdot\gamma)]=0 \qquad (B\cdot 18)$$

**証明**　定理［10］より奇数個の $\gamma_\mu$ を含むトレースは0であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_m)&=\mathrm{Tr}\Big(\sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m=1}^{4}(a_1)_{\mu_1}(a_2)_{\mu_2}\cdots(a_m)_{\mu_m}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m}\Big)\\&=\sum_{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m=1}^{4}(a_1)_{\mu_1}(a_2)_{\mu_2}\cdots(a_m)_{\mu_m}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_m})\\&=0\end{aligned}$$

ここでトレースの線形性 (*B*·*8*) を用いた．

［13］

$$\mathrm{Tr}[(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)]=n(a\cdot b) \qquad (B\cdot 19)$$

**証明**

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})=\mathrm{Tr}(\not{b}\not{a})$$

であるから，(*B*·*4*) を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b})&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a})\\&=\mathrm{Tr}(a\cdot b)=n(a\cdot b)\end{aligned}$$

［14］

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)]=n[&(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)\\&+(a\cdot d)(b\cdot c)]\end{aligned} \qquad (B\cdot 20)$$

**証明**　4個のγ行列の積のトレースを与える式 (*B*·*17*) および線形性 (*B*·*8*) を用いる．まず

$$\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}=\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=1}^{4}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})&=\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=1}^{4}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)\\&=n\sum_{\mu,\nu,\rho,\sigma=1}^{4}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma(\delta_{\mu,\nu}\delta_{\rho,\sigma}-\delta_{\mu,\rho}\delta_{\nu,\sigma}+\delta_{\mu,\sigma}\delta_{\nu,\rho})\\&=n[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)]\end{aligned}$$

[15]　$\mathrm{Tr}[(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)]=\mathrm{Tr}[(d\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(a\cdot\gamma)]$　(*B*·*21*)

**証明**　(*B*·*20*) より明らかである.

[16]
$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)(f\cdot\gamma)]\\&=(a\cdot b)\mathrm{Tr}[(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)(f\cdot\gamma)]\\&\quad-(a\cdot c)\mathrm{Tr}[(b\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)(f\cdot\gamma)]\\&\quad+(a\cdot d)\mathrm{Tr}[(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)(f\cdot\gamma)]\\&\quad-(a\cdot e)\mathrm{Tr}[(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)(f\cdot\gamma)]\\&\quad+(a\cdot f)\mathrm{Tr}[(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)(e\cdot\gamma)]\end{aligned}\tag{B·22}$$

**証明**　(*B*·*4*) により

$\mathrm{Tr}(\not a\not b\not c\not d\not e\not f)=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not c\not d\not e\not f)-\mathrm{Tr}(\not b\not a\not c\not d\not e\not f)$ が成り立つ. これはトレースの中で $\not a$ を1つ右へ移す式である. $\not a$ が1番右へ移るまでこの手続きを続けると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not a\not b\not c\not d\not e\not f)&=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not c\not d\not e\not f)-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not b\not d\not e\not f)+\mathrm{Tr}(\not b\not c\not a\not d\not e\not f)\\&=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not c\not d\not e\not f)-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not b\not d\not e\not f)\\&\quad+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not e\not f)-\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not a\not e\not f)\\&=2(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not c\not d\not e\not f)-2(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not b\not d\not e\not f)\\&\quad+2(a\cdot d)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not e\not f)-2(a\cdot e)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not f)\\&\quad+2(a\cdot f)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not e)-\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not e\not f\not a)\end{aligned}$$

ところが, (*B*·*9*) より $\mathrm{Tr}(\not a\not b\not c\not d\not e\not f)=\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not e\not f\not a)$ であるから, 結局

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\not a\not b\not c\not d\not e\not f)&=(a\cdot b)\mathrm{Tr}(\not c\not d\not e\not f)-(a\cdot c)\mathrm{Tr}(\not b\not d\not e\not f)\\&\quad+(a\cdot d)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not e\not f)-(a\cdot e)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not f)\\&\quad+(a\cdot f)\mathrm{Tr}(\not b\not c\not d\not e)\end{aligned}$$

## 付録C　双一次共変量

§3·4 において, Lorentz 変換に対して, 波動関数が

$$\psi'(x')=S\psi(x)\tag{C·1}$$

と変換されるような, 一次変換 $S$ の存在が示された. ここでは, $\gamma$ 行列の任意の個数の積を $\bar\psi$ と $\psi$ ではさんだ量 (**双一次量**という) が Lorentz 変換に対してどのように変換するかを調べてみよう.

(*C*·*1*) より, $\bar\psi'(x')$ は

$$\bar{\psi}'(x')=\psi'^{\dagger}(x')\gamma_4=\psi^{\dagger}(x)S^{\dagger}\gamma_4 \tag{C·2}$$

と変換される．ただし，$\bar{\psi}'(x')$ は，Lorentz 変換によって変換された $\psi'(x')$ のエルミート共役をとって，それに右から $\gamma_4$ を掛けたものと定義されている．さて

$$S^{-1}\gamma_\mu S=\sum_\nu a_{\mu\nu}\gamma_\nu \tag{3·43}$$

のエルミート共役をとる．$\mu=k$ $(k=1,2,3)$ に対しては $\gamma_k{}^{\dagger}=\gamma_k$，$\gamma_4{}^{-1}=\gamma_4$ を用い

$$\begin{aligned}S^{\dagger}\gamma_k{}^{\dagger}(S^{-1})^{\dagger}&=-(S^{\dagger}\gamma_4)\gamma_k(S^{\dagger}\gamma_4)^{-1}\\&=\sum_{\nu=1}^{4}a_{k\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}\end{aligned} \tag{C·3}$$

次に $\sum_\nu a_{k\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}$ を $\nu=i$ $(i=1,2,3)$ の部分と $\nu=4$ の部分とに分けて計算する．

$$a_{ik}{}^{*}=a_{ik},\quad a_{44}{}^{*}=a_{44},\quad a_{i4}{}^{*}=-a_{i4},\quad a_{4i}{}^{*}=-a_{4i} \tag{C·4}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{4}a_{k\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}&=\sum_{i=1}^{3}a_{ki}\gamma_i{}^{\dagger}-a_{k4}\gamma_4{}^{\dagger}=-\sum_{i=1}^{3}a_{ki}\gamma_4\gamma_i\gamma_4{}^{-1}-a_{k4}\gamma_4\gamma_4\gamma_4{}^{-1}\\&=-\sum_{\nu=1}^{4}a_{k\nu}\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4{}^{-1}=-\gamma_4S^{-1}\gamma_kS\gamma_4{}^{-1}\\&=-(\gamma_4S^{-1})\gamma_k(\gamma_4S^{-1})^{-1}\end{aligned} \tag{C·5}$$

$\mu=4$ に対しては，まず (3·43) のエルミート共役をとると

$$\begin{aligned}S^{\dagger}\gamma_4{}^{\dagger}(S^{-1})^{\dagger}&=(S^{\dagger}\gamma_4)\gamma_4(S^{\dagger}\gamma_4)^{-1}\\&=\sum_{\nu=1}^{4}a_{4\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}\end{aligned} \tag{C·6}$$

次に $\sum_\nu a_{4\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}$ に (C·4) の $a_{4\nu}{}^{*}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{4}a_{4\nu}{}^{*}\gamma_\nu{}^{\dagger}&=-\sum_{i=1}^{3}a_{4i}\gamma_i{}^{\dagger}+a_{44}\gamma_4{}^{\dagger}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{4\nu}\gamma_4\gamma_\nu\gamma_4{}^{-1}\\&=\gamma_4S^{-1}\gamma_4S\gamma_4{}^{-1}=(\gamma_4S^{-1})\gamma_4(\gamma_4S^{-1})^{-1}\end{aligned} \tag{C·7}$$

を得る．(C·3) と (C·5)，(C·6) と (C·7) を比較すると

$$S^{\dagger}\gamma_4=\gamma_4S^{-1} \tag{C·8}$$

となるような $S$ を選ぶことによって，我々の目的に適した変換行列が得られる．したがって (C·2) は

$$\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)S^{-1} \tag{C·9}$$

と書くことができる．

$\bar{\psi}$ の変換式が（$C\cdot9$）によって与えられたので，$\bar{\psi}O\psi$（O は $\gamma$ 行列の任意の積）の Lorentz 変換に対する変換性を調べることにしよう．§3・3 で述べたように，$\gamma$ 行列のどんな積でも（$3\cdot30$）で与えられた 16 個の積に還元できるので，$\Gamma_i(i=1,2,\cdots,16)$ の変換だけ考えればよい．

［1］
$$\Gamma_i=1$$
$$\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}S^{-1}S\psi=\bar{\psi}\psi$$

これは Lorentz 不変な**スカラー**である（（$1\cdot30$）参照）．

［2］
$$\Gamma_i=\gamma_\mu \qquad (\mu=1,2,3,4)$$
$$\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi'=\bar{\psi}S^{-1}\gamma_\mu S\psi=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma_\nu\psi$$

これは（$1\cdot31$）より，**ベクトル**である．

［3］
$$\Gamma_i=\sigma_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu=1,2,3,4)$$
$$\bar{\psi}'\sigma_{\mu\nu}\psi'=\frac{1}{2i}\bar{\psi}S^{-1}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)S\psi$$
$$=\frac{1}{2i}\bar{\psi}(S^{-1}\gamma_\mu SS^{-1}\gamma_\nu S-S^{-1}\gamma_\nu SS^{-1}\gamma_\mu S)\psi$$
$$=\frac{1}{2i}\sum_{\lambda,\rho=1}^{4}a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}\bar{\psi}(\gamma_\lambda\gamma_\rho-\gamma_\rho\gamma_\lambda)\psi=\sum_{\lambda,\rho=1}^{4}a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}\bar{\psi}\sigma_{\lambda\rho}\psi$$

（$1\cdot32$）より，これは 2 階の（反対称）**テンソル**である．

［4］
$$\Gamma_i=\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$
$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi'=\bar{\psi}S^{-1}\gamma_1SS^{-1}\gamma_2SS^{-1}\gamma_3SS^{-1}\gamma_4S\psi$$
$$=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho=1}^{4}a_{1\lambda}a_{2\mu}a_{3\nu}a_{4\rho}\bar{\psi}\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\psi$$
$$=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho=1}^{4}a_{1\lambda}a_{2\mu}a_{3\nu}a_{4\rho}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

ここで

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}=\begin{cases}+1 & \lambda,\mu,\nu,\rho \text{ が } 1,2,3,4 \text{ の偶順列に対して}\\ -1 & 1,2,3,4 \text{ の奇順列に対して}\\ 0 & 2 \text{ つ以上の添字が等しいものに対して}\end{cases}$$

と定義する．$\sum_{\lambda,\mu,\nu,\rho}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}a_{1\lambda}a_{2\mu}a_{3\nu}a_{4\rho}$ は Lorentz 変換の係数 $a_{\mu\nu}$ の作る行列式である．したがって

$$\bar{\psi}'\gamma_5\psi'=\det(a_{\mu\nu})\bar{\psi}\gamma_5\psi$$

$\det(a_{\mu\nu})=\pm 1$ であるが，特に空間反転に対しては $-1$ だから，符号を変える．このような量を**擬スカラー**という．

［5］

$$\Gamma_i = i\gamma_5\gamma_\mu \qquad (\mu=1,2,3,4)$$

$$\bar{\psi}' i\gamma_5\gamma_\mu \psi' = i\bar{\psi} S^{-1}\gamma_5 S S^{-1}\gamma_\mu S\psi$$

$$= \sum_{\nu=1}^{4} \det(a_{\lambda\rho})\, a_{\mu\nu} \bar{\psi} i\gamma_5\gamma_\nu \psi$$

$\bar{\psi} i\gamma_5\gamma_\mu\psi$ は固有 Lorentz 変換（$\det(a_{\mu\nu})=1$）に対してはベクトルと同じ変換をするが，空間反転 ($\det(a_{\mu\nu})=-1$) に対しては符号を変える．このような量を**擬ベクトル**（または**軸性ベクトル**）という．擬ベクトルの例は角運動量である．

このようにして，Dirac 方程式を満たす波動関数 $\bar{\psi}$, $\psi$ から作られた**双一次量の共変性**は次のようになる．

| | |
|---|---|
| $\bar{\psi}\psi$ | スカラー |
| $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ | ベクトル |
| $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ | 2階反対称テンソル |
| $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$ | 擬(軸性)ベクトル |
| $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ | 擬スカラー |

(C·10)

(3·27) で定義された確率の流れ

$$j_\mu = (\boldsymbol{j}, ic\rho) = ic\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \qquad (\mu=1,2,3,4) \tag{C·11}$$

は4元ベクトルの変換性を示す．連続の式 (3·28) は

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{C·12}$$

と相対論的に不変な形に書くことができ，確率の流れの保存を表す．

# 付録D 粒子数表現

## D·1 粒子数表現

同種粒子を2個以上（$N$ 個）含む系，つまり多体系の状態を表す波動関数としては，一般には $N$ 個の粒子の座標とスピンを含む関数

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N)$$

が用いられる．しかし，現実にはこのままの形では手がつけられないので，$\Psi$ を1粒子関数をもとにして構成する．すなわち，1粒子関数として完全系を形成する関数系を適当にとり，その積の1次結合を作れば一般の $\Psi$ を表すことができるはずである．

このとき，もっとも大切なことは粒子の交換に対する対称性である．量子力学では，同種粒子を区別することはできないから，$N$ 個の粒子に $1, 2, \cdots, N$ と番号をつけ，この系のハミルトニアン $H$ を書き下し，次に粒子番号のつけかえを行なって，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$ としても，$H$ は不変である．いま $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N)$ が Schrödinger 方程式

$$H\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N) = E\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N) \qquad (D\cdot 1)$$

の解であるならば，粒子番号のつけかえによって得られる波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_{\alpha 1}, \sigma_{\alpha 1}, \boldsymbol{r}_{\alpha 2}, \sigma_{\alpha 2}, \cdots, \boldsymbol{r}_{\alpha N}, \sigma_{\alpha N})$ も，$H$ の不変性のために，$(D\cdot 1)$ の解となる．さらに

$$c_1\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N) + c_2\Psi(\boldsymbol{r}_{\alpha 1}, \sigma_{\alpha 1}, \boldsymbol{r}_{\alpha 2}, \sigma_{\alpha 2}, \cdots, \boldsymbol{r}_{\alpha N}, \sigma_{\alpha N}),$$

$$c_1,\ c_2 \text{ は定数}$$

も $(D\cdot 1)$ の解である．このことから，$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \sigma_N)$ が与えられると，粒子番号のつけかえに対して，対称な解と反対称な解とを作ることができる．たとえば，$N=2$ のとき

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1, \sigma_1, \boldsymbol{r}_2, \sigma_2) \pm \Psi(\boldsymbol{r}_2, \sigma_2, \boldsymbol{r}_1, \sigma_1)$$

である．プラスの符号をとれば対称，マイナスの符号をとれば反対称の解である．この対称性は時間と共に変化することはない．系のある物理状態に対応する波動関数は1つしかないから，$\Psi$ は粒子の交換に対して対称または反対称かのどちらかでなければならない．そのいずれが現れるかは粒子の種類による．スピンが整数の粒子（光子など**ボーズ粒子**）では対称，スピンが半奇数の粒子（電子などの**フェルミ粒子**）では反対称である．今，1粒子の波動関数 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ が規格直交系を作るものとしよう．この中から適当に $N$ 個（同じものが重複してもよい）をとり出した積関数

$$\phi_1(1)\phi_2(2)\cdots\phi_N(N) \qquad (D\cdot 2)$$

を作ったとき，一般にはこのような関数は対称性の条件を満足しない．ここで，$\phi_i(j)$ は $j$ 番目の粒子が状態 $\phi_i$ にあることを表す．したがって $(D\cdot 2)$ の積関数は，1番目の粒子は状態 $\phi_1$，2番目の粒子は状態 $\phi_2, \cdots,$ にあることを示す．反対称の条件に従うフェルミ粒子の場合，粒子のあらゆる置換を行なって**反対称化**したものは，置換を $P$ で表すと

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P(-1)^P P\phi_1(1)\phi_2(2)\cdots\phi_N(N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1)\cdots\cdots\phi_N(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2)\cdots\cdots\phi_N(2) \\ \vdots & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N)\cdots\cdots\phi_N(N) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\det|\phi_1(1)\phi_2(2)\cdots\cdots\phi_N(N)| \qquad (D\cdot 3)$$

という行列式の形で書ける．$(-1)^P$ は偶置換に対し正，奇置換に対し負とする．この行列式を **Slater 行列式**という．一般の波動関数は，この Slater 行列式の1次結合で表され

る．一方，対称の条件に従うボーズ粒子に対しては

$$\frac{1}{\sqrt{N!n_1!\,n_2!\cdots n_m!}}\sum_P P\phi_1(1)\phi_1(2)\cdots\phi_1(n_1)\phi_2(n_1+1)\phi_2(n_1+2)\cdots\phi_2(n_1+n_2)\cdots\phi_m(N)$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{N!n_1!\,n_2!\cdots n_m!}}\mathrm{per}\,|\phi_1(1)\phi_1(2)\cdots\phi_m(N)| \qquad (D\cdot 4)$$

ただし $n_1+n_2+\cdots+n_m=N$

を用いればよい．per は **permanent** と呼び，行列式を展開したとき，各展開項に現れる $(-1)^P$ を全部プラスにとったものである．また展開項の数は行列式と同じく $N!$ 個あるが，そのうち $n_1!n_2!\cdots n_m!$ 個づつ同じものになるから，規格化因子が行列式とは異なる．

フェルミ粒子，ボーズ粒子，いずれについても，上のような（反）対称化した積関数を指定するには，その各々の積の中に1粒子関数 $\phi_k$ が何個含まれるか，すなわち $\phi_k$ で表される状態を占める粒子数を指定すれば十分である．$\phi_k$ を占める粒子数を $n_k$ として，(反) 対称化した積関数を

$$|n_1,\cdots,n_k,\cdots,n_m,\cdots\rangle \qquad (D\cdot 5)$$

ただし $n_1+n_2+\cdots+n_m+\cdots=N$（総粒子数）

その複素共役（状態ベクトルと考えればエルミート共役）を

$$|n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots\rangle^\dagger=\langle n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots|$$

で表すことにする．ボーズ粒子の場合には，$n_k$ は0および任意の正整数が許され，$|n_1,n_2,\cdots\rangle$ または per は $\phi_k$ の並べ方に関係しない．しかし，フェルミ粒子では，$n_k$ は0または1だけが許され，また $\phi_k$ の順序により全体の符号が異なってくる．この場合には，$|n_1,\cdots,n_k,\cdots,n_m\rangle$ はたとえば

$$|1,1,0,\cdots,1,0,\cdots\rangle \qquad (D\cdot 6)$$

のような形をしていて，これは

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\det|\phi_1(1)\phi_2(2)\phi_4(3)\cdots|$$

を表すものと約束する．粒子が1つもない状態に関しては次節を参照されたい．

(*D*·*5*) の形の関数を，ヒルベルト (Hilbert) 空間の基底ベクトルにとると，多体系の一般の波動関数 $\Psi$ は，これらを基底にして展開できる．すなわち

$$\Psi=\sum_{(n_i)}c_{n_1,n_2,\cdots}|n_1,n_2,\cdots\rangle \qquad (D\cdot 7)$$

ここで $(n_i)$ の和は $\phi_1,\phi_2,\cdots$ のうち $n_1$ 個が $\phi_1$, $n_2$ 個が $\phi_2$, $\cdots$ $(n_1+n_2+\cdots+n_m+\cdots=N)$ であるような可能なすべての組合せについて和をとることを表す．$c_{n_1,n_2,\cdots}$ は展開係数である．このような基底のとり方をしたとき，その表現を**粒子数表現** (number representation) という．

この表現では，各1粒子関数に粒子がどのように配置されるかだけが問題になる．ま

た，粒子数表現の基底は，もとになる1粒子関数の系が変われば一般には変わる．さらに，粒子数が一定の場合には，$\sum n_k=N$ が一定のところだけ成分をもつ．しかし，輻射場を扱う場合などでは，粒子は絶えず生成消滅を繰り返していると考えられるので，$N$ の異なった範囲にも基底を拡げなければならない．粒子数表現は，粒子数が一定でない場合に，特に威力を発揮する．

## D·2　生成および消滅演算子

前節で述べたように，粒子数表現では，系の波動関数は，個々の粒子の固有状態 $\phi_k$ を占める粒子数を指定することによって与えられた．しかし，輻射場などのように，粒子数が一定でない場合があるので，まず粒子数を変化させる演算子を考えよう．フェルミ粒子には符号の問題があるので，簡単なボーズ粒子をとり扱う．

### a　ボーズ粒子

演算子 $a_k$ とそのエルミート共役演算子 $a_k^\dagger$ を次のように定義する．

$$a_k|\cdots, n_k, \cdots\rangle=\sqrt{n_k}|\cdots, n_k-1, \cdots\rangle \tag{D·8}$$

$$a_k^\dagger|\cdots, n_k, \cdots\rangle=\sqrt{n_k+1}|\cdots, n_k+1, \cdots\rangle \tag{D·9}$$

ここで，波動関数の中の…の部分は不変である．$a_k$, $a_k^\dagger$ はもちろんエルミート演算子ではなく，そのままでは物理量を表さない．$a_k$ は $k$ 状態の粒子数を $n_k$ 個から $n_k-1$ 個の状態に移す演算子，つまり $k$ 状態の粒子を1個減らす演算子なので，これを**消滅演算子** (annihilation operator)，$a_k^\dagger$ は逆に $k$ 状態の粒子を1個増やすので，**生成演算子** (creation operator) と呼ぶ．$\sqrt{n_k}$, $\sqrt{n_k+1}$ は，それぞれ波動関数の規格化を保証するための係数である．

以下簡単のため，混乱のおそれのないときは，$|\cdots, n_k, \cdots\rangle$ を単に $|n_k\rangle$ と書くことにする．(D·8)，(D·9) からただちに

$$a_k a_k^\dagger|n_k\rangle=(n_k+1)|n_k\rangle \tag{D·10}$$

$$a_k^\dagger a_k|n_k\rangle=n_k|n_k\rangle \tag{D·11}$$

がわかる．$a_k^\dagger a_k$ は $k$ 状態の粒子数を与える演算子で，これを $N_k$ と書くことにする．

$$\sum_k N_k=N, \qquad N_k=a_k^\dagger a_k \tag{D·12}$$

$N$ は**全粒子数を与える演算子** (number operator) である．(D·12) の和はすべての状態について行なう．(D·10)，(D·11) より

$$(a_k a_k^\dagger-a_k^\dagger a_k)|n_k\rangle=|n_k\rangle \tag{D·13}$$

任意のボーズ粒子の波動関数は，種々の $|n_k\rangle$ の1次結合で与えられるはずだから，(D·13) は一般に

$$a_k a_k^\dagger-a_k^\dagger a_k\equiv[a_k, a_k^\dagger]=1 \tag{D·14}$$

であることを示す．また

$$a_k^\dagger a_{k'}^\dagger|n_k, n_{k'}\rangle=\sqrt{(n_k+1)(n_{k'}+1)}\;|n_k+1,\; n_{k'}+1\rangle$$

$$=a_{k'}{}^{\dagger}a_k{}^{\dagger}|n_k, n_{k'}\rangle$$

であるから

$$[a_k{}^{\dagger}, a_{k'}{}^{\dagger}]=0$$

そこでボーズ粒子の場合には

$$[a_k, a_{k'}{}^{\dagger}]=\delta_{k,k'} \tag{D·15}$$

$$[a_k, a_{k'}]=[a_k{}^{\dagger}, a_{k'}{}^{\dagger}]=0 \tag{D·16}$$

(*D*·*15*), (*D*·*16*) は $a_k$, $a_k{}^{\dagger}$ の基本的な交換関係である.

今度は，逆に交換関係 (*D*·*15*), (*D*·*16*) を出発点として，(*D*·*8*), (*D*·*9*) が導かれることを示す. 5章で述べたように，場の量子化の手続きの際には，古典的な場の量を演算子でおきかえるとき，その演算子に対する性質として交換関係から出発するので，このことは重要である.

$k \neq k'$ の交換関係は問題ではないので $k=k'$ の場合のみについて述べよう. (*D*·*15*) より

$$a_k a_k{}^{\dagger}-a_k{}^{\dagger}a_k=1$$

だけが残る. $a_k{}^{\dagger}a_k$ の1つの固有ベクトルを $|n_k\rangle$, その固有値を $\lambda_{n_k}$ と書くと

$$a_k{}^{\dagger}a_k|n_k\rangle=\lambda_{n_k}|n_k\rangle$$

これに左から $a_k{}^{\dagger}$ を作用させ，上記の交換関係を用いると

$$a_k{}^{\dagger}(a_k{}^{\dagger}a_k)|n_k\rangle=a_k{}^{\dagger}(a_k a_k{}^{\dagger}-1)|n_k\rangle$$
$$=a_k{}^{\dagger}a_k(a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle)-a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle$$

一方

$$a_k{}^{\dagger}(a_k{}^{\dagger}a_k)|n_k\rangle=a_k{}^{\dagger}\lambda_{n_k}|n_k\rangle$$

であるから

$$a_k{}^{\dagger}a_k(a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle)-a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle=\lambda_{n_k}a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle$$

したがって

$$a_k{}^{\dagger}a_k(a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle)=(\lambda_{n_k}+1)a_k{}^{\dagger}|n_k\rangle$$

同様にして，左から $a_k$ を作用させると

$$a_k(a_k{}^{\dagger}a_k)|n_k\rangle=(a_k{}^{\dagger}a_k+1)a_k|n_k\rangle$$
$$=\lambda_{n_k}a_k|n_k\rangle$$

したがって

$$a_k{}^{\dagger}a_k(a_k|n_k\rangle)=(\lambda_{n_k}-1)a_k|n_k\rangle$$

つまり，$a_k, a_k{}^{\dagger}$ はそれぞれ $a_k{}^{\dagger}a_k$ の固有値を1だけ減少または増加させる性質をもつ. これは (*D*·*8*), (*D*·*9*) である.

ところで $a_k{}^{\dagger}a_k$ の固有値 $\lambda_{n_k}$ は負にならない. なぜなら

$$\lambda_{n_k}=\langle n_k|a_k{}^{\dagger}a_k|n_k\rangle=(a_k|n_k\rangle, a_k|n_k\rangle)$$
$$=|a_k|n_k\rangle|^2\geq 0$$

したがって1つの $|n_k\rangle$ に対して $a_k$ を繰返し作用させると，もし $\lambda_{n_k}$ が0または正の整数でないときには，負の固有値が出て上記に反する．そこで最後には

$$a_k a_k \cdots a_k |n_k\rangle = 0$$

に到達する．すべての $k$ について $n_k$ が0である状態は，粒子が1つもない状態であるから，これを**真空**といい，$|0\rangle$ で表す（§5·1参照）．$|0\rangle$ に対する固有値 $\lambda_0$ は0である．$k$ 状態に粒子が1個ある状態は $|0\rangle$ に $a_k^\dagger$ を作用させて得られる．$a_k^\dagger$ を繰返し作用させた状態は，$a_k^\dagger a_k$ の固有値が1ずつ増し，一般に

$$\lambda_{n_k} = n_k \quad (n_k = 0, 1, 2, \cdots)$$

が得られる．この操作を一般化して（$D$·9）を繰返し用いると，$|n_1, n_2, \cdots\rangle$ は

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle \tag{D·17}$$

と表される．

b　フェルミ粒子

この場合は，$n_k = 0$, 1 であることと，符号に注意しなければならない．そこで消滅および生成演算子を

$$a_k |n_1, n_2, \cdots, n_k = 1, \cdots\rangle = (-1)^n |n_1, n_2, \cdots, n_k = 0, \cdots\rangle \tag{D·18}$$

$$\text{ここで } n = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$$

$$a_k^\dagger |n_1, n_2, \cdots, 0, \cdots\rangle = (-1)^n |n_1, n_2, \cdots, 1, \cdots\rangle \tag{D·19}$$

$$a_k |\cdots, 0, \cdots\rangle = 0 \tag{D·20}$$

$$a_k^\dagger |\cdots, 1, \cdots\rangle = 0 \tag{D·21}$$

と定義する．この場合は，$a_k$ で消滅，$a_k^\dagger$ で生成される関数の場所によって符号が異なることに注意を要する．$n$ は $k$ より前に現れる被占状態の数であり，たとえば

$$a_k^\dagger \frac{1}{\sqrt{N!}} \det|\phi_1(1)\phi_2(2)\cdots|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det|\phi_k(1)\phi_1(2)\phi_2(3)\cdots|$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \det|\phi_1(1)\phi_k(2)\phi_2(3)\cdots|$$

等である．交換関係を次に導く．$k \neq k'$ のとき

$$a_{k'}^\dagger a_k |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{0}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, \cdots\rangle = (-1)^n |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{1}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{0}, \cdots\rangle \tag{D·22}$$

$$\text{ここで } n = \sum_{i=k'+1}^{k-1} n_i$$

$$a_{k'}^\dagger a_k |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{0}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{0}, \cdots\rangle = a_{k'}^\dagger a_k |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{1}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, \cdots\rangle$$

$$=0 \tag{D·23}$$

$$a_k a_{k'}^{\dagger} |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{0}, \cdots \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, \cdots\rangle = (-1)^{n-1} |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{1}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{0}, \cdots\rangle \tag{D·24}$$

$$a_k a_{k'}^{\dagger} |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{0}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{0}, \cdots\rangle = a_k a_{k'}^{\dagger} |\cdots, \underset{\underset{k'}{\uparrow}}{1}, \cdots, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, \cdots\rangle$$

$$=0 \tag{D·25}$$

一方 $k=k'$ のとき

$$a_k^{\dagger} a_k |\cdots, 1, \cdots\rangle = |\cdots, 1, \cdots\rangle \tag{D·26}$$

$$a_k^{\dagger} a_k |\cdots, 0, \cdots\rangle = 0 \tag{D·27}$$

$$a_k a_k^{\dagger} |\cdots, 0, \cdots\rangle = |\cdots, 0, \cdots\rangle \tag{D·28}$$

$$a_k a_k^{\dagger} |\cdots, 1, \cdots\rangle = 0 \tag{D·29}$$

$(D·22)\sim(D·29)$ より

$$a_k a_{k'}^{\dagger} + a_{k'}^{\dagger} a_k \equiv [a_k, a_{k'}^{\dagger}]_+ = \delta_{k,k'} \tag{D·30}$$

$$[a_k, a_{k'}]_+ = [a_k^{\dagger}, a_{k'}^{\dagger}]_+ = 0 \tag{D·31}$$

$[\ \ ]_+$ を**反交換子** (anticommutator) と呼ぶ.

たとえば, $(D·30)$ は次のようにして導かれる. $(D·26)\sim(D·29)$ をまとめて書くと

$$a_k^{\dagger} a_k |\cdots, n_k, \cdots\rangle = n_k |\cdots, n_k, \cdots\rangle$$

$$a_k a_k^{\dagger} |\cdots. n_k, \cdots\rangle = (1-n_k) |\cdots, n_k, \cdots\rangle$$

これらの式を辺々加えれば

$$(a_k a_k^{\dagger} + a_k^{\dagger} a_k) |\cdots, n_k, \cdots\rangle = |\cdots, n_k, \cdots\rangle$$

$$a_k^{\dagger} a_k = N_k \tag{D·32}$$

が $k$ 状態にある粒子数を与えることはボーズ粒子と同様で

$$\sum_k N_k = N \tag{D·33}$$

は全粒子数を与える演算子である.

今度はボーズ粒子の場合に行なったように, 逆に交換関係 $(D·30)$, $(D·31)$ から出発する.

$$a_k a_k^{\dagger} + a_k^{\dagger} a_k = 1$$

$$a_k a_k = a_k^{\dagger} a_k^{\dagger} = 0$$

上の式に $a_k^{\dagger} a_k$ を左から掛けて

$$a_k^{\dagger} a_k a_k a_k^{\dagger} + a_k^{\dagger} a_k a_k^{\dagger} a_k = a_k^{\dagger} a_k$$

$a_k a_k = 0$ を用いると

$$a_k^{\dagger} a_k a_k^{\dagger} a_k = (a_k^{\dagger} a_k)^2 = a_k^{\dagger} a_k$$

したがって, $a_k^{\dagger} a_k$ の固有値は 0 と 1 しかなく, また $a_k^{\dagger}$, $a_k$ がそれぞれ $a_k^{\dagger} a_k$ の固有値

を1だけ増減させる性質をもつことも容易にわかる．特に，固有値1および0に対する固有ベクトル $|\cdots,1,\cdots\rangle$ および $|\cdots,0,\cdots\rangle$ に対して

$$a_k^{\dagger}|\cdots,1,\cdots\rangle=a_k|\cdots,0,\cdots\rangle=0$$

ここでは，真空 $|0\rangle$ と混同しないように $|\cdots,n_k\cdots\rangle$ を用いた．ボーズ粒子の場合と同様に，粒子が1つもない状態（すべての $k$ に対して $n_k=0$）を**真空**と呼び，$|0\rangle$ と表す．これはSlater行列式で書くことはできないが，$a_k^{\dagger}$ を作用させると $k$ 状態に粒子が1個現れるから，やはり $|0\rangle$ も状態ベクトルである．これが具体的にどのような形のものかは問題でない．$|0\rangle$ に $a_k$ や $a_k^{\dagger}$ が作用したとき，どのようになるかを知れば十分である．すなわち，任意の $k$ に対し

$$\begin{cases} a_k^{\dagger}|0\rangle=|0,\ 0,\ \cdots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ k}}{1},\ 0,\ \cdots\rangle \\ a_k|0\rangle=0 \end{cases} \tag{D·34}$$

ボーズ粒子の場合と同じく，$|n_1,\ n_2,\ \cdots\rangle$ は $a_k^{\dagger}$ を順に作用させることにより得られる．

$$|1,1,\cdots\rangle=a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\cdots|0\rangle$$

したがって

$$a_k^{\dagger}|n_1,n_2,\cdots\rangle=|n_k=1,n_1,n_2,\cdots\rangle$$

これを $|n_1,n_2,\cdots,n_k=1,\cdots\rangle$ の順に直すと $(-1)^n$ の因数が現れる．すなわち，(D·19)に現れる $n=\sum_{i=1}^{k-1}n_i$ は反対称性のためである．$a_k$ については，$|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k=1,\ \cdots\rangle$ を $(-1)^n|n_k=1,n_1,\cdots,n_{k-1},n_{k+1},\cdots\rangle$ と直して $a_k$ を作用させるので，やはり $(-1)^n$ の因数が必要である．これが (D·18) である．

### D·3 粒子数表現での物理量

§D·1，§D·2で論じた粒子数表現を用いた場合，物理量はどのような形になるかが次に問題となる．

いま粒子はフェルミ粒子であるとし，物理量としてハミルトニアンを考えよう．粒子数を $N$ 個とすると，ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H&=\sum_k h_k+\sum_{i>k}v_{ik} \\ h_k&=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_k+v_k \end{aligned} \tag{D·35}$$

と書くことができる．$h_k$ は1つの粒子座標 $(\boldsymbol{r},\sigma)$ にだけ関係した演算子で，これを**1粒子演算子**という．$v_{ik}$ は2つの粒子座標に関係する演算子，すなわち**2粒子演算子**で，特殊の場合以外は，多粒子系の物理量はこのような1粒子および2粒子演算子の和として表すことができる．問題は，これらの演算子の行列要素 $\langle n_1',n_2',\cdots|h_k|n_1,n_2,\cdots\rangle$ および $\langle n_1',n_2',\cdots|v_{ik}|n_1,n_2,\cdots\rangle$ を求めることである．それは，$h_k$ あるいは $v_{ik}$ をSlater行

列式に作用させ，この結果をもとの基底系—Slater 行列式の 系—で書くことにほかならない．

まず1粒子演算子

$$h^T=\sum_k h_k \tag{D·36}$$

を Slater 行列式

$$\frac{1}{\sqrt{N!}}\det|\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)|\equiv\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]$$

に作用させてみる．（演算子 $h^T$ の上付添字 $T$ は，全粒子についての和を意味している．後で（$D$·*38*）に示されるように1つの粒子だけに関与する演 算 子 $h_k$ の行列要素が，1粒子座標 $k$ に依存しないことを示すために，$h$ という記号を使用する．）$\mathscr{A}$ は**反対称化の演算子**である．行列式の性質と $h^T$ が置換に対して対称なことから，$h^T$ と $\mathscr{A}$ は交換可能であることがわかる．したがって

$$\begin{aligned}&h^T\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]\\&=\mathscr{A}h^T[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]\\&=\mathscr{A}[h_1\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]+\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)h_2\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]\\&\quad+\cdots+\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots h_N\phi_{l_N}(N)]\end{aligned} \tag{D·37}$$

一方 $h_i\phi_{l_i}(i)$ を展開すれば

$$h_i\phi_{l_i}(i)=\sum_m\langle m|h|l_i\rangle\phi_m(i) \tag{D·38}$$

ただし

$$\langle m|h|n\rangle=\int\phi_m{}^*(1)h_1\phi_n(1)d\tau_1 \tag{D·39}$$

と書ける．$m$に関する和は完備系を作るすべての1粒子関数について行なう．

$$\begin{aligned}&h^T\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(l_N)]\\&=\sum_{i=1}^N\sum_m\langle m|h|l_i\rangle\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\cdots\phi_{l_{i-1}}(i-1)\phi_m(i)\phi_{l_{i+1}}(i+1)\cdots\phi_{l_N}(N)]\\&=\sum_n\sum_m\langle m|h|n\rangle a_m{}^\dagger a_n\mathscr{A}[\phi_{l_1}(1)\phi_{l_2}(2)\cdots\phi_{l_N}(N)]\end{aligned} \tag{D·40}$$

$m$, $n$ についての和は，完備系を作るあらゆる1粒子関数について行なう．$l_i$ の中に含まれていない $n$ については，（$D$·*20*）により影響しない．したがって粒子数表現での $h^T$ の形は

$$h^T\longrightarrow\sum_n\sum_m\langle m|h|n\rangle a_m{}^\dagger a_n \tag{D·41}$$

となる．

また2粒子演算子 $v_{ij}$ のすべての $ij$ の組についての和

$$V^T=\sum_{i<j}v_{ij} \tag{D·42}$$

に関しても，$V^T$ と $\mathscr{A}$ とが交換可能なことを考えれば，上と同様にして

$$V^T \to \frac{1}{2}\sum_k\sum_l\sum_n\sum_m \langle kl|v|mn\rangle a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_m \tag{D·43}$$

ただし

$$\langle kl|v|mn\rangle = \iint \phi_k^*(1)\phi_l^*(2)v_{12}\phi_m(1)\phi_n(2)d\tau_1 d\tau_2 \tag{D·44}$$

が導かれる．特に〈 〉の中の $k, l, m, n$ の順序と，演算子の順序が異なっていることは注意を要する．フェルミ粒子の場合は（$D$·31）により，$a_m a_n$ を $a_n a_m$ にすると符号が変わるから，この順序は大切である．

ボーズ粒子でも，1粒子全対称演算子 $h^T=\sum_k h_k$，2粒子全対称演算子 $V^T=\sum_{i<j} v_{ij}$（上で示したように，始めはハミルトニアンとしたが，$h_k, v_{ij}$ の具体的な形は問題でない）とすると，対称化の演算子と $h^T$ や $V^T$ は交換可能だから

$$\begin{aligned}
&h^T|n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\cdots}} h^T \mathrm{per}|\underbrace{\phi_1\cdots\phi_1}_{n_1}\underbrace{\phi_2\cdots\phi_2}_{n_2}\cdots| \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\cdots}}[n_1 \mathrm{per}|h\phi_1, \underbrace{\phi_1\cdots\phi_1}_{n_1-1}\underbrace{\phi_2\cdots\phi_2}_{n_2}\cdots| \\
&\quad + n_2 \mathrm{per}|\underbrace{\phi_1\cdots\phi_1}_{n_1}, h\phi_2, \underbrace{\phi_2\cdots\phi_2}_{n_2-1}\cdots|+\cdots]
\end{aligned} \tag{D·45}$$

このうち1つの per をとり，$h\phi_k$ を展開すると

$$\begin{aligned}
&n_k \mathrm{per}|\phi_1\cdots\phi_1\cdots, h\phi_k, \phi_k\cdots\phi_k\cdots| \\
&= \sum_l \langle l|h|k\rangle n_k \mathrm{per}|\cdots, \phi_l, \underbrace{\phi_k\cdots\phi_k}_{n_k-1}\cdots|
\end{aligned}$$

そこで（$D$·45）は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{N!n_1!n_2!\cdots}}\sum_k\sum_l \langle l|h|k\rangle n_k \mathrm{per}|\cdots, \phi_l, \phi_k\cdots\phi_k\cdots| \\
&= \sum_k [\langle k|h|k\rangle n_k|n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots\rangle \\
&\quad + \sum_{l\neq k}\langle l|h|k\rangle\sqrt{n_k(n_l+1)}\,|n_1, n_2, \cdots, n_l+1, \cdots, n_k-1, \cdots\rangle] \\
&= [\sum_k \langle k|h|k\rangle a_k^\dagger a_k + \sum_k\sum_{l\neq k}\langle l|h|k\rangle a_l^\dagger a_k]\,|n_1, n_2, \cdots, n_l, \cdots, n_k, \cdots\rangle
\end{aligned} \tag{D·46}$$

上式中の2つの和をまとめると

$$h^T \to \sum_l\sum_k \langle l|h|k\rangle a_l^\dagger a_k \tag{D·47}$$

となって，フェルミ粒子の場合と形式上は全く一致する．2粒子演算子でも

$$V^T \to \frac{1}{2}\sum_k\sum_l\sum_m\sum_n \langle kl|v|mn\rangle a_k^\dagger a_l^\dagger a_n a_m \tag{D·48}$$

となる．ただしフェルミ粒子と違って，$a_n a_m$ でも $a_m a_n$ でも結果に影響はない．

## D·4　場の演算子

前の節では生成消滅の演算子を，状態 $k$ の粒子を1個増減するものとして定義したが，今度はこれらを空間の各点 $\boldsymbol{r}$ で粒子を生成，消滅させるものとして定義することを考えよう．

今，1粒子の任意の完備系 $\phi_k(\boldsymbol{r})$ をとり，これを用いて生成消滅の演算子 $a_k^\dagger, a_k$ を作る．簡単のため，当分の間スピンのことは考えない．次のような $a_k^\dagger, a_k$ の1次結合

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_k \phi_k(\boldsymbol{r})a_k \tag{D·49}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r})=\sum_k \phi_k^*(\boldsymbol{r})a_k^\dagger \tag{D·50}$$

を作る．右辺の $\phi_k(\boldsymbol{r}), \phi_k^*(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の関数で普通の数，いわゆる $c$ 数である．左辺の $\psi(\boldsymbol{r}), \psi^\dagger(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の関数ではあるが，しかし演算子，いわゆる $q$ 数である．また，$\boldsymbol{r}$ は特定の粒子の位置でなく，単に空間内の位置を指定するだけのもので，いいかえれば，空間内の各点に $\psi(\boldsymbol{r}), \psi^\dagger(\boldsymbol{r})$ という演算子が付随していることを意味している．すなわち，この空間は演算子の場であるといえる．

(D·49), (D·50) で導入された演算子 $\psi(\boldsymbol{r}), \psi^\dagger(\boldsymbol{r})$ はもとの完備系 $\phi_k$ のとり方によらないことは次のようにしてわかる．$\phi_k$ 系とは別の1粒子完備系 $\phi_l$ をとり，$\phi_k$ を $\phi_l$ 系で展開すると

$$\phi_k(\boldsymbol{r})=\sum_l \langle\phi_l|\phi_k\rangle\phi_l(\boldsymbol{r}) \tag{D·51}$$

$$\langle\phi_l|\phi_k\rangle=\int\phi_l^*\phi_k d\boldsymbol{r} \tag{D·52}$$

これらを (D·49), (D·50) に代入すると

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_l\sum_k \langle\phi_l|\phi_k\rangle\phi_l(\boldsymbol{r})a_k \tag{D·53}$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r})=\sum_l\sum_k \langle\phi_l|\phi_k\rangle^*\phi_l^*(\boldsymbol{r})a_k^\dagger=\sum_l\sum_k \langle\phi_k|\phi_l\rangle\phi_l^*(\boldsymbol{r})a_k^\dagger \tag{D·54}$$

ところで $\phi_l$ 系をもとにした生成消滅の演算子を $b_l^\dagger, b_l$ とすると，$b_l^\dagger$ は $\phi_l$ の状態にある粒子を1個追加することであり

$$\phi_l(\boldsymbol{r})=\sum_k \langle\phi_k|\phi_l\rangle\phi_k(\boldsymbol{r}) \tag{D·55}$$

を用いて $|\cdots, n_l, \cdots\rangle$ と $|\cdots, n_l+1, \cdots\rangle$ とを作ってみるとわかるように

$$b_l^\dagger=\sum_k \langle\phi_k|\phi_l\rangle a_k^\dagger \tag{D·56}$$

の関係があることがわかる．これを (D·54) に代入すると

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r})=\sum_l \phi_l^*(\boldsymbol{r})b_l^\dagger \tag{D·57}$$

このエルミート共役を作れば

$$\psi(\boldsymbol{r})=\sum_l \phi_l(\boldsymbol{r})b_l \tag{D·58}$$

したがって，$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}), \psi(\boldsymbol{r})$ は，どのような1粒子完備系を用いて定義しても同じものに

なる．特に1粒子完備系として，位置の演算子 $\boldsymbol{r}$ に対する固有関数系

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

をとり，その系での生成消滅演算子を $c_{r'}^\dagger, c_{r'}$ と書くと

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r})=\int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')c_{r'}^\dagger d\boldsymbol{r}'=c_r^\dagger \qquad (D\cdot 59)$$

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')c_{r'}d\boldsymbol{r}'=c_r \qquad (D\cdot 60)$$

となり，$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}), \psi(\boldsymbol{r})$ は位置演算子の固有関数系をもとにした生成消滅の演算子，つまり空間内の位置 $\boldsymbol{r}$ のところで粒子を1個生成あるいは消滅させる演算子であることがわかる．このような $\psi^\dagger, \psi$ を**場の演算子** (field operator) と呼ぶ．

(*D*·*49*), (*D*·*50*) を逆変換すれば

$$a_k^\dagger=\int\psi_k(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (D\cdot 61)$$

$$a_k=\int\psi_k^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \qquad (D\cdot 62)$$

となって，一般の生成消滅の演算子を場の演算子で表すことができる．$\psi^\dagger, \psi$ はもとの完備系を $\delta$ 関数にとった $a_k^\dagger, a_k$ の特別の場合だから，§D·2 の交換関係はもちろんそのまま成り立つ．ただし，前に $k$ と書いた添字の代わりに，連続変数 $\boldsymbol{r}$ が入ってくるから，$\delta_{k,k'}$ の代わりに $\delta$ 関数が現れる．

$$\psi(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\mp\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (D\cdot 63)$$

$$\psi(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}')\mp\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})=\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\mp\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\psi^\dagger(\boldsymbol{r})=0 \qquad (D\cdot 64)$$

ここで，マイナス・サインはボーズ粒子，プラス・サインはフェルミ粒子の場合である．

(*D*·*12*), (*D*·*32*) に対応して

$$\rho(\boldsymbol{r})=\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (D\cdot 65)$$

を考えれば，これは空間の点 $\boldsymbol{r}$ における粒子密度を表す演算子であり，粒子数演算子は

$$N=\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}=\sum_k a_k^\dagger a_k \qquad (D\cdot 66)$$

と書ける．後の便宜上 $N$ の固有ベクトルで，同時に $\rho(\boldsymbol{r})$ の固有ベクトルの系を

$$e_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \qquad (N=0, 1, 2, \cdots) \qquad (D\cdot 67)$$

と書き，これは空間の $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ の点にそれぞれ $\delta$ 関数型の粒子密度が1つずつ存在する状態を表すものとする．

$$\begin{aligned}&\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})e_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)\\&=\sum_s^N\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s)e_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_{s-1}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{r}_N)\\&=\left(\sum_s^N\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s)e_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_s, \cdots\boldsymbol{r}_N)\right)\end{aligned}$$

$e_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ は $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ の値で番号づけがなされていて，その演算子 $N$ に対す

る固有値 $N$ は無限に縮退している．（注意，演算子と固有値に同じ記号を用いている．）

### D·5　場の演算子を用いたハミルトニアンと運動方程式

§D·3では，生成消滅演算子を用いてハミルトニアン演算子を表したが，ここでは場の演算子を用いて，ハミルトニアンを表してみよう．それには，(*D·41*), (*D·44*) あるいは (*D·47*), (*D·48*) の中の $a_k^\dagger, a_k$ の代わりに $\psi^\dagger(\boldsymbol{r}), \psi(\boldsymbol{r})$ を用い，和の代わりに積分を使えばよい．普通の表現でのハミルトニアンは (*D·35*) で与えられているものとする．

この際 $h$ のエルミート性と $\delta$ 関数の直交性から (*D·39*) に対応して

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{r}''|h|\boldsymbol{r}'\rangle &= \int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')h(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r} \\ &= h(\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')\end{aligned}$$

したがって (*D·41*) に対応する式は

$$\begin{aligned}&\iint \langle \boldsymbol{r}''|h|\boldsymbol{r}'\rangle \psi^\dagger(\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}''d\boldsymbol{r}' \\ &\quad = \iint [h(\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}''-\boldsymbol{r}')]\psi^\dagger(\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}''d\boldsymbol{r}' \\ &\quad = \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}'')h(\boldsymbol{r}'')\psi(\boldsymbol{r}'')d\boldsymbol{r}'' \qquad (D\cdot 68)\end{aligned}$$

同様に (*D·44*), (*D·43*) に対応して

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\iiiint \langle \boldsymbol{r}''''\boldsymbol{r}'''|v|\boldsymbol{r}''\boldsymbol{r}'\rangle \psi^\dagger(\boldsymbol{r}'''')\psi^\dagger(\boldsymbol{r}''')\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}'')d\boldsymbol{r}''''d\boldsymbol{r}'''d\boldsymbol{r}''d\boldsymbol{r}' \\ &\quad = \frac{1}{2}\iint \psi^\dagger(\boldsymbol{r}'')\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}'')d\boldsymbol{r}'d\boldsymbol{r}'' \qquad (D\cdot 69)\end{aligned}$$

となる．ここで $\boldsymbol{r}'''', \cdots, \boldsymbol{r}'$ の順序に注意されたい．そこで $\boldsymbol{r}''\to\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}'\to\boldsymbol{r}_1$ として

$$\begin{aligned}H &\to \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})h(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\iint \psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \\ &= \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + v(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}\iint \psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1, d\boldsymbol{r}_2 \qquad (D\cdot 70)\end{aligned}$$

が得られる．

ところが，$\psi^\dagger, \psi$ はエルミート演算子ではないので，直接物理量には対応しない．しかし Heisenberg 表示をとったとき，エルミートでない演算子でもやはり

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

($A$ は $\psi^\dagger$ または $\psi$) に従って変化するものと考える．演算子 $\psi$ が $t$ を陽に含まないときには (Schrödinger 表示) $\partial\psi/\partial t=0$ である．Heisenberg 表示では $\psi$ は時間に依存し，$\psi$ の時間微分は

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dt}=[H,\psi]$$

で与えられる．ここで注意すべきことは，$\psi$ は $\boldsymbol{r}$ を指定して始めて決まる演算子である．すなわち，$\boldsymbol{r}$ は単なる添字と考えてよく，$\boldsymbol{r}$ に対する $t$ の微分は含まれない．このことをはっきりさせるために上の式の $d\psi/dt$ を便宜上 $\partial\psi/\partial t$ と書く．そこで上の式は

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=[H,\psi] \tag{D·71}$$

となる．(D·71) の右辺に (D·70) を代入すると，フェルミ（ボーズ）粒子の場合は上（下）符号を用い

$$\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')h(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\psi(\boldsymbol{r})-\psi(\boldsymbol{r})\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')h(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$
$$=\mp\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})h(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'-\int\psi(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')h(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

ここで第1項のダブル・サインは (D·64) を用いた．さらに (D·63) を用いると

$$=-\int\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')h(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$
$$=-h(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{D·72}$$

同様に

$$\iint\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2\psi(\boldsymbol{r})$$
$$-\psi(\boldsymbol{r})\iint\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2$$
$$=\iint[\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r})-\psi(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)]v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2$$
$$=\iint\{\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)[\pm\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\mp\psi(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)]-[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\mp\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\psi(\boldsymbol{r})]\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)\}$$
$$\times v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2$$
$$=\pm\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_2)v(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_2-\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}_1)v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}_1$$
$$=-2\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\psi(\boldsymbol{r}) \tag{D·73}$$

したがって，フェルミ粒子，ボーズ粒子共，同じ結果

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\varDelta+v(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})+\int\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')v(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'\psi(\boldsymbol{r}) \tag{D·74}$$

が得られる．$\psi(\boldsymbol{r}),\psi^\dagger(\boldsymbol{r})$ を演算子でなく，普通の量と考えれば，相互作用のない場合は (D·74) は1粒子の Schrödinger 方程式と形式上は一致するが，物理的意味は全く異なる．なお，相互作用の項があれば，(D·74) は $\psi$ について非線形，一方 Schrödinger 方程式は波動関数について線形であるから，両者は本質的に異なる．

粒子が $N$ 個 ($N>1$) あるときには，系を記述する波動関数は $3N$ 次元状態空間で定

義されたものであって，波動関数自身は我々の存在する3次元空間の実在波ではない．しかし，この波動関数に作用する生成消滅演算子を作り，その特別の場合として場の演算子 $\psi^\dagger, \psi$ を考えると，これらはちょうど3次元空間内の各点に付随している形になり，実在空間を演算子の場と見ることが可能になる．

粒子が種々の場（クーロン場など）と相互作用を行なう場合，粒子の運動は量子力学に従い，場の量，たとえば粒子にはたらくポテンシャルや輻射場は外から与えられたものとして扱った．したがって演算子の場といったものは今まで現れなかったし，また $(D\cdot74)$ ももとは粒子の運動を記述するための手段にすぎなかった．しかし，$(D\cdot74)$ を全く別の見方をすると，2粒子間の相互作用によって引き起こされる系の時間的変化の過程は，空間内の点 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ で2つの粒子が消滅し，これらの各点に新たに2つの粒子が生成される過程として表されると考えることができる．このように，場の量自身を物理量と見て量子化することが可能であり，また必要にもなる．場の量子化は次の節で行なう．

今度は逆に，$(D\cdot66)$ の粒子数演算子の固有ベクトル系 $(D\cdot67)$ を用いて多粒子系の状態ベクトル $\Psi$ を次のように展開したとき

$$\Psi=\sum_N\int\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)e_N(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N)d\boldsymbol{r}_1d\boldsymbol{r}_2\cdots d\boldsymbol{r}_N$$

状態ベクトルの成分 $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)$ の満たす式を求めてみると

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)=\sum_{k=1}^{N}\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{r}_k}+v(\boldsymbol{r}_k)+\sum_{l>k}^{N}v(\boldsymbol{r}_k,\boldsymbol{r}_l)\Big]\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)$$

となって，$N$ 粒子系の Schrödinger 方程式となることを示すことができる．粒子数が保存されない場合には，異なる $N$ に対する $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N;t)$ が連立する形になる．

### D·6　第2量子化—場の量子化

場を記述する変数は，粒子の運動を記述する変数と同様に，観測によって決定されるべきものであるから，この意味では物理量でなくてはならない．物理量であれば量子力学的に考えれば，やはり状態ベクトルに作用する演算子とみなさなければならない．そこで，この節では，場の演算子を量子化することを考えてみよう．

我々は，今，物質は波動であるという波動論の立場に立ってみることにしよう．その波動量 $\psi(\boldsymbol{r})$ を記述する「古典的な」式が

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+v(\boldsymbol{r})\Big]\psi(\boldsymbol{r},t) \qquad (D\cdot75)$$

であるとする．これは，たとえば光の場合の Maxwell の方程式に対応するものと考えればよい．$(D\cdot75)$ には $\hbar$ が入っているから，その意味では量子論的であるが，$\psi(\boldsymbol{r})$ はまだ演算子（$q$ 数）ではなく，普通の数（$c$ 数）だから，この意味では「古典的」である．場というものも1つの力学系（自由度が無限大の）であり，それを記述するのが $\boldsymbol{r}$ のとり得る各々の値で番号づけ（番号といっても連続無限個）される場の量 $\psi(\boldsymbol{r})$ である．し

たがって量子論的に考えれば，$\psi(\boldsymbol{r})$ は当然演算子でなければならない．さて，$(D\cdot75)$ の $\psi$ の場に対して

$$\text{粒子密度}：\rho(\boldsymbol{r})=\psi^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) \tag{D·76}$$

$$\text{粒子流}：\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\frac{\hbar}{2mi}[\psi^*(\boldsymbol{r})\nabla\psi(\boldsymbol{r})-\psi(\boldsymbol{r})\nabla\psi^*(\boldsymbol{r})] \tag{D·77}$$

$$\text{エネルギー密度}：w(\boldsymbol{r})=\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\nabla\psi+v\psi^*\psi \tag{D·78}$$

$$\text{エネルギー流}：\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r})=\frac{\hbar^3}{4m^2i}(\nabla\psi^*\Delta\psi-\Delta\psi^*\nabla\psi)+\frac{\hbar}{2mi}v(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\psi) \tag{D·79}$$

を定義すると，これらはそれぞれ必要な連続の方程式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{s}+\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

を満たしている．また全粒子数，全エネルギーはそれぞれ

$$N=\int\rho(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{D·80}$$

$$H=\int w(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} \tag{D·81}$$

で与えられる．場も1つの力学系だとすれば，そのハミルトニアンは，やはり適当な互いに共役な一般化運動量と一般化座標を用いて全エネルギーを表したものであり，一般化座標および運動量の時間的変化を規定するのは正準運動方程式である．実際

$$P=i\hbar\psi^*,\quad Q=\psi \tag{D·82}$$

を定義して $(D\cdot81)$ に代入すると，$(D\cdot75)$ は

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{r})}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial Q(\boldsymbol{r})},\quad \frac{\partial Q(\boldsymbol{r})}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial P(\boldsymbol{r})} \tag{D·83}$$

となり，$P, Q$ を共役な運動量と座標とすれば，これは正準型である．

量子化の手続きとしては，これらを演算子とみなして，適当な交換関係を導入すればよい．しかし，ここでは後々の便宜のためと，わかりやすくするために，$(D\cdot75)$ などを少し変形してから量子化を行なう．

$(D\cdot75)$ で

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=e^{-i\frac{\varepsilon}{\hbar}t}u(\boldsymbol{r}) \tag{D·84}$$

とおいて変数分離を行なえば

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u+vu=\varepsilon u \tag{D·85}$$

ここで規格化された固有関数，固有値を $u_k, \varepsilon_k$ と書けば，$\psi(\boldsymbol{r},t)$ は

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\sum_k a_k(t)u_k(\boldsymbol{r}) \tag{D·86}$$

と展開でき，$u_k$ の規格直交性より

$$i\hbar\frac{da_k}{dt}=\varepsilon_k a_k \tag{D·87}$$

が得られる．一方，全粒子数（$D\cdot80$），全エネルギー（$D\cdot81$）は

$$N=\sum_k a_k{}^* a_k \tag{D·88}$$

$$H=\sum_k \varepsilon_k a_k{}^* a_k \tag{D·89}$$

したがって（$D\cdot87$）は

$$i\hbar\frac{da_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial a_k{}^*} \tag{D·90}$$

あるいは，この複素共役をとって

$$-i\hbar\frac{da_k{}^*}{dt}=\frac{\partial H}{\partial a_k} \tag{D·91}$$

と書くことができ，これは $i\hbar a_k{}^*, a_k$ を共役な運動量と座標と考えれば，正準方程式の形である．

ここで $a_k, a_k{}^\dagger$ を演算子（$q$ 数）と考えて，適当な交換関係を導入して量子化を行なう．まず（$D\cdot88$）をながめてみると，これは $a_k{}^*, a_k$ を生成消滅演算子 $a_k{}^\dagger, a_k$ としたときの粒子数演算子（$D\cdot12$）および（$D\cdot32$）と同じ形であり，またそれぞれの1粒子状態 $k$ を占める粒子数が決まれば，（$D\cdot89$）により全エネルギーも決まってくる．$a_k{}^*, a_k$ をこのように考えれば，粒子数は0または正の整数となり，波動を量子化して粒子数概念が現れたわけである．$a_k{}^*, a_k \to a_k{}^\dagger, a_k$ とあらためれば $\psi^*, \psi$ も $\psi^\dagger, \psi$ とあらためられ，（$D\cdot75$）～（$D\cdot83$）はいずれも演算子としての関係を表す．

$a_k{}^\dagger, a_k$ の交換関係は，ここで現れる粒子がボーズ粒子かフェルミ粒子かによって（$D\cdot15$），（$D\cdot16$），あるいは（$D\cdot30$），（$D\cdot31$）をとればよい．

このようにして，はじめ物質波という3次元空間の実在波の場の方程式（$D\cdot75$）から出発して，$a$（したがって $\psi$）を演算子と考えることにより量子化がなされた．その際（$D\cdot75$）は1粒子の Schrödinger 方程式と形が同じであるにもかかわらず，実在波を表すとして量子化すると多粒子の存在する状態も表されることになる．その状態を表す状態ベクトルは，抽象的な状態空間中のベクトルである．

この節では波動を量子化して，場の演算子の式として古典的な式（$D\cdot75$）と全く同じ式に達したし，また前節では量子化された粒子から出発しても同じ式に達した．この意味で波動の量子化と，粒子の量子化とは，内容的に全く同等である．このような波動の量子化のことを第2量子化（second quantization）という．場の方程式がすでに $\hbar$ を含んでいるという意味で量子論的であり，さらにこの $\psi$ を量子化したという意味で**第2量子化**と呼ぶ．

# 索　　引

## ソ



## タ



## チ



## ツ



## テ



## ト

## 著者紹介


もりたまさと
森田正人

1952年　東京大学理学部物理学科卒業
専　　攻　原子核理論
現　　在　大阪大学教授・理学博士
主要著書　Beta Decay and Muon Capture　(Benjamin)
　　　　　ベータ崩壊と弱い相互作用　(共著・培風館)

もりたれいこ
森田玲子

1962年　米国コロンビア大学大学院博士課程卒業
専　　攻　素粒子論
現　　在　摂南大学工学部講師・Ph. D.
主要著書　ウィグナー：群論と量子力学　(共訳・吉岡書店)



共立物理学講座 15　**相対論的量子力学**
**〔量子力学2 改訂改題〕**

検　印　廃　止

**定価 2800 円**





1988年8月25日　初版1刷発行

著　者　森　田　正　人
　　　　森　田　玲　子

発行者　南　條　正　男
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　山　岡　景　信
東京都江東区亀戸7丁目45番2号

NDC 421.3

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
　　　　電 話　東 京 947 局 2511 番(代表)
　　　　郵便番号 112　振替 東京 1-57035 番
**共立出版株式会社**

組版・海外印刷　印刷・科学図書　製本・中條製本
Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN 4-320-03261-6